2022학년도 수시모집 논술고사 채점기준 및 예시답안(의·약학계)

- 공통문항 1-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$P(x)=2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$로 두고 $x^n\cdot\dfrac{2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{2+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n}=x^3$ 를 확인할 수 있다.	5
	차수 n의 범위를 구할 수 있다.	6
	$n=2$인 경우, 주어진 조건을 만족시키는 다항함수 $P(x)$를 모두 구할 수 있다.	3
	$n=3$인 경우, 주어진 조건을 만족시키는 다항함수 $P(x)$를 모두 구할 수 있다.	6
[1-2]	$Q(x)=ax^2+a$를 구할 수 있다.	3
	$Q(x)$의 범위를 알 수 있다.(최댓값, 최솟값)	2
	$10^{-2a}\le y\le 10^{-a}$일 때, $f(y)=1$임을 확인할 수 있다.	6
	적분을 포함한 부등식이 성립함을 보일 수 있다.	4

2. 예시 답안

[1-1]

$P(x)=2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$라 하자.

양수 x에 대하여, $\log P(x)$와 $\log P\left(\frac{1}{x}\right)$가 진수조건을 만족해야 하므로 $P(x)>0$이어야 한다.

$$\log P(x)-\log P\left(\frac{1}{x}\right)=3\log x$$

이므로

$$\log\left(\frac{P(x)}{P\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=\log\left(x^n\cdot\frac{2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{2+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n}\right)=\log x^3$$

이고

$$x^n\cdot\frac{2x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{2+a_{n-1}x+\cdots+a_0x^n}=x^3$$

이다. 따라서

$$2x^{2n}+a_{n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_0x^n=a_0x^{n+3}+\cdots+a_{n-1}x^4+2x^3$$

이고

$3 \le 2n \le n+3$

이다. 위 조건을 만족시키는 정수 n은 2와 3이다.

(i) $n=2$인 경우

양수 x에 대하여

$2x^2 + a_1 x + a_0 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + 2x$

이므로 $a_0 = 0$이고 $a_1 = 2$이다. 따라서 $P(x) = 2x^2 + 2x$이고, 이 다항함수 $P(x)$는 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

(ii) $n=3$인 경우

양수 x에 대하여

$2x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + 2$

이므로 $a_0 = 2$이고 $a_2 = a_1$이다. 즉,

$P(x) = 2x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + 2$

이다. 이때,

$P(1) = 4 + 2a_1 > 0, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3a_1}{4} < 3$

을 만족시키는 정수 a_1은 -1과 0뿐이므로 $P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$이거나 $P(x) = 2x^3 + 2$이다

이 두 다항함수 모두 양수 x에 대하여 양의 값을 가진다.

(i)과 (ii)에 의해 주어진 조건을 모두 만족시키는 최고차항의 계수가 2인 다항함수 $P(x)$는 다음과 같다.

$2x^2 + 2x, \quad 2x^3 - x^2 - x + 2, \quad 2x^3 + 2$

[별해 ($n=3$인 경우)]

양수 x에 대하여

$2x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + 2$

이므로 $a_0 = 2$이고 $a_2 = a_1$이다. 즉,

$P(x) = 2x^3 + a_1 x^2 + a_1 x + 2$

이다. 한편, $P(x) > 0$이므로

$P(x) = 2(x+1)\left(x^2 + \frac{a_1 - 2}{2}x + 1\right) = 2(x+1)\left(\left(x + \frac{a_1 - 2}{4}\right)^2 + 1 - \left(\frac{a_1 - 2}{4}\right)^2\right) > 0$

이고, 따라서 다음의 두 조건 (ㄱ), (ㄴ) 중 하나를 만족시켜야 한다.

(ㄱ) $-\frac{a_1 - 2}{4} \le 0$

(ㄴ) $-\frac{a_1 - 2}{4} > 0$이고 $1 - \left(\frac{a_1 - 2}{4}\right)^2 > 0$

(ㄱ)을 만족시키는 정수 a_1은 $2, 3, 4, \cdots$이고, (ㄴ)을 만족시키는 a_1은 $-1, 0, 1$이다.

$a_1 = -1$이거나 $a_1 = 0$인 경우에만 $P\left(\frac{1}{2}\right) < 3$이 만족되므로, $P(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$이거나 $P(x) = 2x^3 + 2$이다.

[1-2]

양수 x에 대하여 $\log Q(x)$와 $\log Q\left(\frac{1}{x}\right)$가 진수조건을 만족해야 하므로 $Q(x) > 0$이어야 한다.

따라서 $a > 0$이고 $b > 0$이다.

$\log Q(x) - \log Q\left(\frac{1}{x}\right) = 2\log x$

이므로

$\log\left(\frac{Q(x)}{Q\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = \log\left(x^2 \cdot \frac{ax^2+b}{a+bx^2}\right) = \log x^2$

이고

$x^2 \cdot \frac{ax^2+b}{a+bx^2} = x^2$, 즉, $ax^4+bx^2 = bx^4+ax^2$

이다.

$a=b$이고 $Q(x)=ax^2+a$이다. 닫힌구간 $[0,1]$에서 $Q(x)$의 최솟값은 a이고 최댓값은 $2a$이므로,

$10^{-2a} \le y \le 10^{-a}$인 실수 y에 대하여,

$10^{-Q(x)} = y$를 만족시키는 x가 닫힌구간 $[0,1]$에 존재한다.

따라서 조건 $f\left(10^{-Q(x)}\right) = 1$에 의해 $10^{-2a} \le y \le 10^{-a}$일 때, $f(y)=1$이다.

제시문 (나), (다)와 조건 $f(y) \ge 0$로부터

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(y)\,dy &= \int_0^{10^{-2a}} f(y)\,dy + \int_{10^{-2a}}^{10^{-a}} f(y)\,dy + \int_{10^{-a}}^{1} f(y)\,dy \\
&= \int_0^{10^{-2a}} f(y)\,dy + \int_{10^{-2a}}^{10^{-a}} 1\,dy + \int_{10^{-a}}^{1} f(y)\,dy \\
&\ge \int_{10^{-2a}}^{10^{-a}} 1\,dy = \frac{1}{10^a} - \frac{1}{10^{2a}}
\end{aligned}$$

이므로

부등식 $\int_0^1 f(x)\,dx \ge \frac{1}{10^a} - \frac{1}{10^{2a}}$ 이 성립한다.

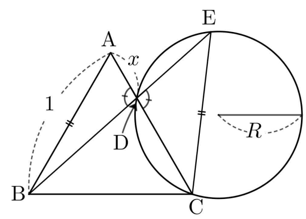
- 공통문항 2-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\mathrm{CDE})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ADB})}=2R$가 성립함을 나타낼 수 있다.	5
	$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{x^2-x+1}$로 나타낼 수 있다.	5
	$R=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{3}}$ 로 나타낼 수 있다.	5
[2-2]	$\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{x(2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 로 나타낼 수 있다.	6
	$\sin(\angle\mathrm{CDE})=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{x^2-x+1}}$ 로 나타낼 수 있다.	4
	$S=\dfrac{\sqrt{3}x(1-x)(2-x)}{4(x^2-x+1)}$ 로 나타낼 수 있다.	5
	$S\times\overline{\mathrm{BD}}^2$이 최댓값을 갖게 하는 선분 AD의 길이가 $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$임을 구할 수 있다.	5

2. 예시 답안

[2-1]



$\angle\mathrm{ADB}$와 $\angle\mathrm{CDE}$는 맞꼭지각으로 서로 같고, 주어진 조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이다.

$\triangle\mathrm{CDE}$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\mathrm{CDE})}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ADB})}=2R$$

이므로 $\triangle\mathrm{ADB}$의 외접원의 반지름의 길이도 R이다.

또한 $\overline{\mathrm{AD}}=x\,(0<x<1)$라 하면 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{BD}}^2=x^2+1^2-2x\cos\dfrac{\pi}{3}=x^2-x+1$ 이다.

즉, $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{x^2-x+1}$ 이다.

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BAD})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ 이므로 $R=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{3}}$ 이다.

[2-2]

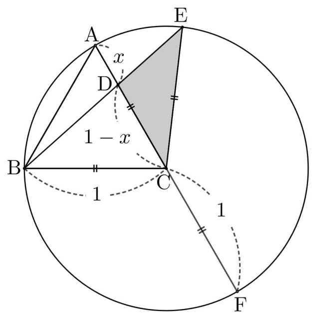
$\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이므로 점 A, 점 B, 점 E는 모두 점 C를 중심으로 하는

반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

직선 AC가 이 원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자.

$\overline{\mathrm{AD}}=x\,(0<x<1)$라 하면 $\overline{\mathrm{CD}}=1-x$이므로 $\overline{\mathrm{DF}}=2-x$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{DE}}$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{x(2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 이다.



또한 $\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\mathrm{CDE})}=2R$ 이므로 $\sin(\angle\mathrm{CDE})=\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{2R}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{x^2-x+1}}$ 이다.

이때 $\triangle\mathrm{CDE}$의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle\mathrm{CDE})=\frac{1}{2}\times\frac{x(2-x)}{\sqrt{x^2-x+1}}\times(1-x)\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{x^2-x+1}}=\frac{\sqrt{3}\,x(1-x)(2-x)}{4(x^2-x+1)}$$

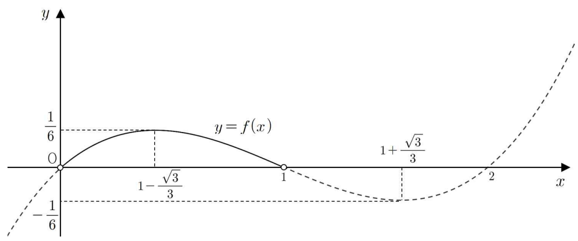
그러므로 $S\times\overline{\mathrm{BD}}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(1-x)(2-x)$이다.

$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(1-x)(2-x)$라 하면, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x^2-6x+2)$이고, $f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$이다.

이때 점 D는 선분 AC 위의 양 끝점점이 아닌 임의의 점이므로 $0<x<1$이다.

따라서 열린구간 $(0,1)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	0



즉 함수 $f(x)$는 $x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이다.

따라서 최댓값을 갖게 하는 선분 AD의 길이는 $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

- 선택문항 유형1(미적분) -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[미적분-1]	$h(x) = \sqrt{x} - \ln(1+x)$ 의 도함수의 부호를 판별하여 $\ln(1+x) \le \sqrt{x}$ 임을 보일 수 있다	2
	$0 \le x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le x\frac{1}{\sqrt{x}}$ 를 유도하고 $\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ 를 구할 수 있다.	3
[미적분-2]	$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 의 양변에 자연로그를 취하고 미분하여 $f'(x) = f(x)g(x)$ 꼴로 나타내어 $g(x)$의 부호를 확인해야 함을 안다.	3
	$g'(x) = \frac{(2\alpha-1)x+\alpha}{(x^2+x)^2}$ 를 구하고 $\alpha \le 0$ 일 때 $x>0$에서 $g'(x)<0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ 이므로 $f(x)$가 증가함수임을 설명할 수 있다.	5
	$\alpha \ge \frac{1}{2}$ 일 때 $x>0$에서 $g'(x)>0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ 이므로 $f(x)$가 감소함수임을 설명할 수 있다.	2
[미적분-3]	$k = \frac{\alpha}{1-2\alpha} > 0$에서 $g'(k)=0$, $x<k$ 에서 $g'(x)>0$, $x>k$ 에서 $g'(x)<0$ 임을 보이고 (k,∞) 에서 $g(x)>0$ 임을 설명할 수 있다.	3
	$\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ 를 이용하여 $\lim_{x\to 0+} g(x) = -\infty$ 임을 구할 수 있다.	4
	제시문 (나)에 의하여 $g(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0,k)$ 에 존재하고, $(0,k)$ 에서 $g'(x)>0$ 이므로 $x<c$ 에서 $g(x)<0$ 이고 $x>c$ 에서 $g(x)>0$임을 설명할 수 있다.	5
	$f(x)$는 $(0,c)$에서 감소하고 $f(x)$는 (c,∞)에서 증가하므로 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 유일한 극솟값을 가짐을 보일 수 있다.	3

2.예시 답안

[미적분-1]

$x \ge 0$ 에 대하여 $h(x) = \sqrt{x} - \ln(1+x)$ 라 하자.

$x > 0$ 에서 $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(1+x)} \ge 0$ 이고 $h(0) = 0$ 이므로

$x \ge 0$ 에서 $h(x) \ge 0$ 즉, $\ln(1+x) \le \sqrt{x}$ 가 성립한다.

또, $x > 0$ 일 때 $0 \le \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ 이고 $0 \le x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \le x\frac{1}{\sqrt{x}}$ 이다.

이때 $\lim_{x\to 0+} x\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ 이므로 $\lim_{x\to 0+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ 이다.

[미적분-2]

$f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

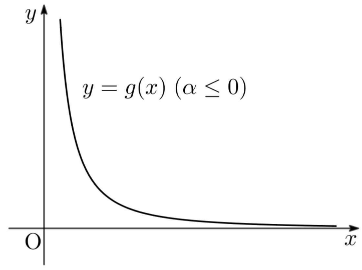
$\ln f(x) = (x + \alpha)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

위 식의 양변을 x 에 대해 미분하면 $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \alpha}{x^2 + x}$ 이다.

$g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \alpha}{x^2 + x}$ 라 하면 $f'(x) = f(x)g(x)$ 이고,

$x > 0$ 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로 $g(x)$ 의 부호를 확인하면 된다.

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이고 $g'(x) = \dfrac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{(x^2 + x)^2}$ 이다.



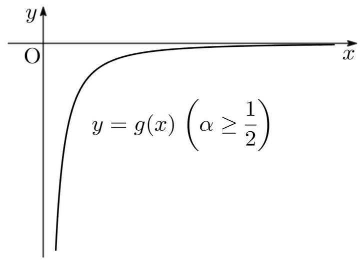
(i) $\alpha \le 0$ 인 경우

$x > 0$ 에서 $g'(x) < 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x) > 0$ 이고

$f'(x) > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 증가한다.



(ii) $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$ 인 경우

$x > 0$ 에서 $g'(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x)$ 는 증가한다.

이때 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 $g(x) < 0$ 이고

$f'(x) < 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, \infty)$ 에서 감소한다.

[미적분-3]

$g'(x) = \dfrac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{(x^2 + x)^2} = 0$ 에서 $g'\left(\dfrac{\alpha}{1 - 2\alpha}\right) = 0$ 이고

$k = \dfrac{\alpha}{1 - 2\alpha} > 0$라 하면 $x < k$ 에서 $g'(x) > 0$, $x > k$ 에서 $g'(x) < 0$ 이다.

이때 [미적분-2]에서 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ 이고 함수 $g(x)$ 는 열린구간 (k, ∞) 에서 감소하므로 열린구간 (k, ∞) 에서

$g(x) > 0$ 이다. ··· i)

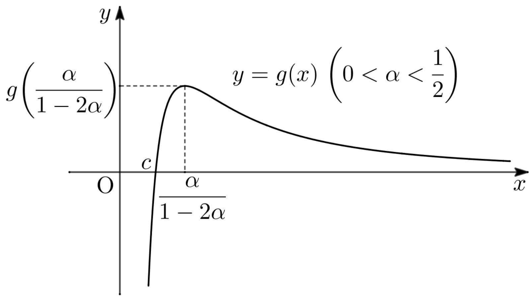
함수 $g(x)$ 는 $x = k$ 에서 연속이므로 $g(k) > 0$ $\left(g(k) = \lim\limits_{x \to k+} g(x) \ge g(2k) > 0\right)$ 이다. ··· ii)

한편, **[미적분-1]**에서의 $\lim\limits_{x \to 0+} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$ 을 이용하면

$\lim\limits_{x \to 0+} xg(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \left\{x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x + \alpha}{x + 1}\right\} = -\alpha < 0$ 이므로 $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = -\infty$

또, 연속함수 $g(x)$ 가 $g(k) > 0$ 이므로

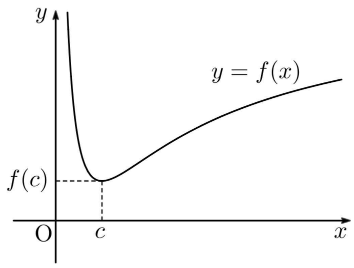
제시문 (나)에 의하여 $g(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, k)$ 에서 적어도 하나 존재한다.



열린구간 $(0,k)$ 에서 $g'(x)>0$ 이므로 $(0,k)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가하고, $x<c$ 에서 $g(x)<0$ 이고 $c<x<k$ 에서 $g(x)>0$ 이다. ⅰ), ⅱ)에 의해 $x>c$ 에서 $g(x)>0$이다.

그러므로 $f'(x)=f(x)g(x)$ 에서 $f'(c)=0$ 이고 $x<c$ 에서 $f'(x)<0$, $x>c$ 에서 $f'(x)>0$이다.

x	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(c)$	↗



$f(x)$는 $(0,c)$에서 감소하고 $f(x)$는 (c,∞)에서 증가하고 $x=c$ 좌우에서 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 제시문 (다)에 의하여 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 유일한 극솟값을 갖는다.

- 선택문항 유형2(기하) -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[기하-1]	전개도로 최단 경로를 찾고, 이를 이용하여 선분의 길이를 계산할 수 있다.	4
	두 평면 $\mathrm{EQ_1R_1F}$와 ABCD의 관계, 두 평면 $\mathrm{EQ_2R_2F}$와 ADP와의 관계를 알아내고 보일 수 있다.	7
	두 평면 $\mathrm{EQ_1R_1F}$, $\mathrm{EQ_2R_2F}$이 이루는 이면각의 크기의 코사인 값을 계산할 수 있다.	4
[기하-2]	내접원의 (반)지름의 길이와 평행한 두 직선 $\mathrm{Q_1R_1}$과 $\mathrm{Q_2R_2}$사이의 거리를 계산할 수 있다.	6
	$k=1.5$를 기준으로 경우를 나눌 수 있다.	3
	정사영의 넓이를 계산할 수 있다.	6

2.예시 답안

[기하-1]

점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 $\mathrm{P'}$이라 하고, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.

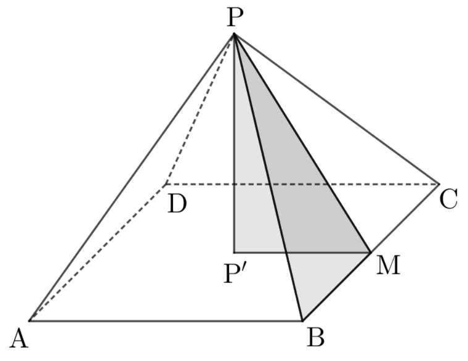
삼각형 PBM이 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{BM}}^2=16-4=12$$

이고 $\overline{\mathrm{PM}}=2\sqrt{3}$이다. 삼각형 $\mathrm{PP'M}$이 직각삼각형이므로,

$$\overline{\mathrm{PP'}}^2=\overline{\mathrm{PM}}^2-\overline{\mathrm{P'M}}^2=12-4=8$$

이고 $\overline{\mathrm{PP'}}=2\sqrt{2}$이다.



점 E에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 점 F에 도착하는 최단 경로는 다음 전개도에서 점 E와 점 F를 연결하는 직선 경로이다. 삼각형 $\mathrm{EBQ_2}$는 정삼각형이므로, $\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{Q_2B}}$이다. 주어진 조건에서

$$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{EB}}=(k+1):1,\quad \overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{BQ_1}}=(k+1):2$$

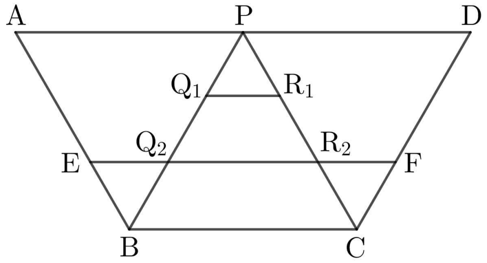
이므로

$$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{BQ_2}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=(k+1):1.$$

이와 같은 방법으로

$$\overline{\mathrm{PC}} : \overline{\mathrm{CR_2}} = \overline{\mathrm{DC}} : \overline{\mathrm{CF}} = (k+1) : 1$$

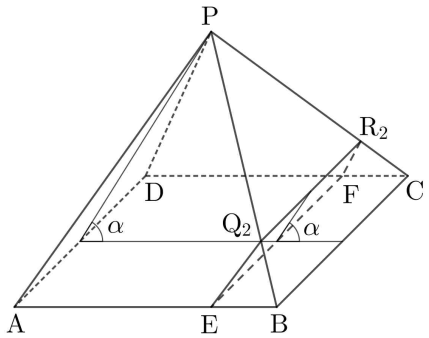
임을 알 수 있다.



다음 그림에서 직선 $\mathrm{EQ_2}$와 직선 AP가 평행하므로 직선 $\mathrm{EQ_2}$는 직선 AP를 포함하는 평면 ADP와 평행하다. 이와 같은 방법으로, 직선 EF는 평면 ADP와 평행함을 알 수 있다. 평면 ADP 위에 있지 않은 한 점 E를 지나고 평면 ADP에 평행한 서로 다른 두 직선 $\mathrm{EQ_2}$와 EF에 의하여 결정되는 평면 $\mathrm{EQ_2R_2F}$는 평면 ADP와 평행하다. 따라서 두 평면 ABCD와 $\mathrm{EQ_2R_2F}$가 이루는 이면각의 크기를 α라 하면, 두 평면 ADP와 ABCD가 이루는 이면각의 크기도 α가 되어,

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.



선분 AB의 중점과 선분 DC의 중점을 각각 점 $\mathrm{N_1}$, $\mathrm{N_2}$라 할 때,

$$\overline{\mathrm{PQ_1}} : \overline{\mathrm{Q_1B}} = \overline{\mathrm{N_1E}} : \overline{\mathrm{EB}} = \overline{\mathrm{PR_1}} : \overline{\mathrm{R_1C}} = \overline{\mathrm{N_2F}} : \overline{\mathrm{FC}} = (k-1) : 2$$

이다. 두 평면 $\mathrm{EQ_2R_2F}$, ADP가 평행함을 보이는 방법으로, 두 평면 $\mathrm{PN_1N_2}$와 $\mathrm{EQ_1R_1F}$는 평행함을 보일 수 있다. 따라서 평면 $\mathrm{EQ_1R_1F}$는 평면 ABCD에 수직이다. 그러므로

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$$

이고

$$\cos\theta = \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.

[기하-1 별해]

점 P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 P'이라 하고, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.

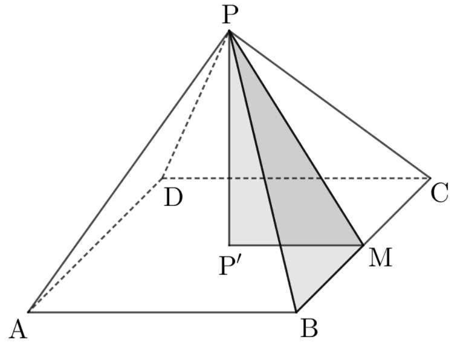
삼각형 PBM이 직각삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 - \overline{\mathrm{BM}}^2 = 16 - 4 = 12$$

이고 $\overline{\mathrm{PM}} = 2\sqrt{3}$이다. 삼각형 $\mathrm{PP'M}$이 직각삼각형이므로,

$$\overline{\mathrm{PP}'}^2 = \overline{\mathrm{PM}}^2 - \overline{\mathrm{P'M}}^2 = 12 - 4 = 8$$

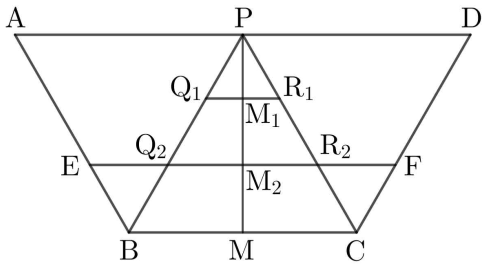
이고 $\overline{\mathrm{PP}'} = 2\sqrt{2}$ 이다.



점 E에서 출발하여 사각뿔의 옆면을 따라 점 F에 도착하는 최단 경로는 다음 전개도에서 점 E와 점 F를 연결하는 직선 경로이다. $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{EB}} = (k+1) : 1$이므로, $\overline{\mathrm{EB}} = \dfrac{4}{k+1}$ 이다. 삼각형 $\mathrm{EBQ_2}$는 정삼각형이므로, $\overline{\mathrm{Q_2B}} = \overline{\mathrm{EB}} = \dfrac{4}{k+1}$ 이다. 점 $\mathrm{M_1}$과 $\mathrm{M_2}$를 각각 선분 $\mathrm{Q_1R_1}$과 선분 $\mathrm{Q_2R_2}$의 중점이라 하자. 두 삼각형 PBC, $\mathrm{PQ_2R_2}$는 닮음이므로, $\overline{\mathrm{PM_2}} = \dfrac{2\sqrt{3}\,k}{k+1}$ 이고, $\overline{\mathrm{M_2M}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{k+1}$ 이다. 두 삼각형 PBC, $\mathrm{PQ_1R_1}$는 닮음이므로,

$$\overline{\mathrm{Q_1R_1}} = \frac{4(k-1)}{k+1},\ \overline{\mathrm{PM_1}} = 2\sqrt{3}\,\frac{k-1}{k+1},\ \overline{\mathrm{M_1M_2}} = \frac{2\sqrt{3}}{k+1}$$

이다.



두 점 $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{M_1}'$, $\mathrm{M_2}'$이라 하자. 삼수선의 정리에 의하여,

$$\overline{\mathrm{M_1'M_2}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$$

이다. 따라서 이면각의 정의에 의해서,

$$\theta = \angle \mathrm{M_1M_1'M_2}$$

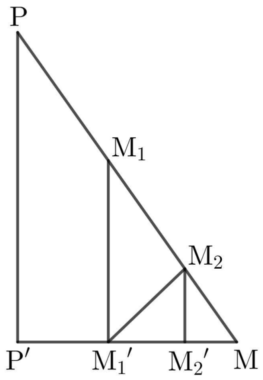
이다. 다음 아래 그림의 삼각형 $\mathrm{PP'M}$에서, 두 직각 삼각형 $\mathrm{MM_2M_2'}$, $\mathrm{MM_1M_1'}$은 $1:2$로 닮음이며, 두 직각 삼각형 $\mathrm{MM_2M_2'}$, $\mathrm{M_1'M_2M_2'}$은 합동이다.

$$\angle \mathrm{M_1M_1'M_2} + \angle \mathrm{M_2M_1'M_2'} = \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\cos\theta = \sin(\angle \mathrm{M_2M_1'M_2'}) = \sin(\angle \mathrm{PMP'}) = \frac{\overline{\mathrm{PP'}}}{\overline{\mathrm{PM}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이다.

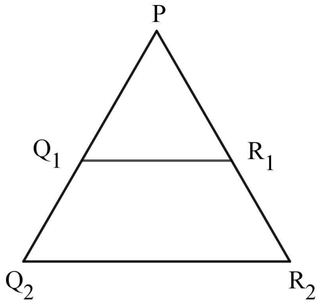


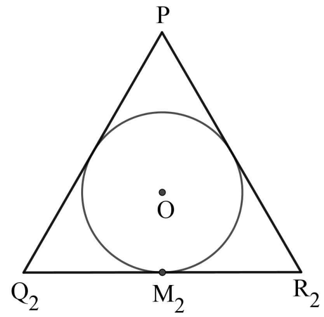
[기하-2]

삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$의 내접원의 중심을 점 O라 하자. 삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$는 정삼각형이므로 점 O는 삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$의 무게중심이 되어, 내접원의 반지름의 길이 r는

$$r=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{PM_2}}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{Q_2R_2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{k}{k+1}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2\sqrt{3}\,k}{3(k+1)}$$

이다. 선분 $\mathrm{Q_1R_1}$이 삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$의 내접원에 접하거나 만나지 않으면, 이 내접원은 사각형 $\mathrm{Q_1Q_2R_2R_1}$에 포함되는 원 중에 최대 지름을 갖는 원이 된다.





선분 $\mathrm{Q_1R_1}$이 삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$의 내접원에 접하는 경우를 조사하기 위해, 점 $\mathrm{M_1}$과 $\mathrm{M_2}$를 각각 선분 $\mathrm{Q_1R_1}$과 선분 $\mathrm{Q_2R_2}$의 중점이라 하자. 선분 $\mathrm{M_1M_2}$의 길이는

$$\overline{\mathrm{M_1M_2}}=\frac{1}{k+1}\times\overline{\mathrm{PM}}=\frac{1}{k+1}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$$

이다. 선분 $\mathrm{M_1M_2}$의 길이와 내접원의 지름이 같아지는 경우가 선분 $\mathrm{Q_1R_1}$이 내접원에 접할 때이다. 즉,

$$\frac{4\sqrt{3}\,k}{3(k+1)}=\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$$

이고, 이때 $k=1.5$이다.

ⅰ) $k\le 1.5$인 경우.

위와 같이 삼각형 $\mathrm{PQ_2R_2}$의 내접원이 사각형 $\mathrm{Q_1Q_2R_2R_1}$에 포함된다. 이때 원의 반지름은 $r=\dfrac{2\sqrt{3}\,k}{3(k+1)}$이다. 원의 넓이는 $\dfrac{4k^2\pi}{3(k+1)^2}$이고 $\cos(\angle\mathrm{PMP'})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로, 이 원의 평면 ABCD로의 정사영의 넓이는

$$(\text{원의 넓이})\times\cos(\angle\mathrm{PMP'})=\frac{4k^2\pi}{3(k+1)^2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}\,k^2\pi}{9(k+1)^2}$$

이다.

ⅱ) $k>1.5$인 경우.

이 경우, 사각형 $\mathrm{Q_1Q_2R_2R_1}$에 포함되는 최대 지름을 갖는 원의 지름은 $\overline{\mathrm{M_1M_2}}$이다. 즉, 최대 지름은 $\frac{2\sqrt{3}}{k+1}$이고, 원의 넓이는 $\frac{3\pi}{(k+1)^2}$이다. $\cos(\angle \mathrm{PMP'}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로, 이 원의 평면 ABCD로의 정사영의 넓이는

$$(\text{원의 넓이}) \times \cos(\angle \mathrm{PMP'}) = \frac{3\pi}{(k+1)^2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{(k+1)^2}$$

이다.