2021학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 채점기준 및 예시답안(자연계)

- 문항 1-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$X=3^x+3^{-x+2}$라 두고 X의 범위를 구한다.	4
	y를 X에 대한 식으로 나타낸다.	3
	$t\geq 6$인 경우 $f(t)$를 구한다.	4
	$t<6$인 경우 $f(t)$를 구한다.	4
[1-2]	주어진 부등식을 X에 대한 이차부등식으로 나타내고 성립하기 위한 조건을 구한다.	5
	$t\geq 6$인 경우 실수 t의 범위를 구한다.	4
	$t<6$인 경우 실수 t의 범위를 구한다.	4
	실수 t의 범위를 구한다.	2

2. 예시 답안

[1-1]

$X=3^x+3^{-x+2}$라 하자. 제시문 (다)에 의해 $3^x>0$, $3^{-x+2}>0$이므로 제시문 (가)에 의해

$$3^x+3^{-x+2}\geq 2\sqrt{3^x\times 3^{-x+2}}=6$$

이다.

따라서 $X\geq 6$이다.

한편 $9^x+9^{-x+2}=(3^x+3^{-x+2})^2-18$이므로 y를 X에 대한 식으로 나타내면

$$y=X^2-18-2tX+82=X^2-2tX+64=(X-t)^2-t^2+64$$

이다.

따라서 $f(t)=\begin{cases}-t^2+64 & (t\geq 6)\\ 100-12t & (t<6)\end{cases}$ 이다.

[1-2]

[1-1]의 결과에 의해 모든 실수 x에 대하여 부등식 $9^x+9^{-x+2}-2t(3^x+3^{-x+2})+82>0$가 항상 성립하기 위해서 $X\geq 6$일 때, 부등식 $X^2-2tX+64>0$가 항상 성립하면 된다.

$g(X)=X^2-2tX+64=(X-t)^2-t^2+64$라 하자.

제시문 (나)에 의해 $X\geq 6$일 때 함수 $g(X)$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있으면 된다.

(i) $t \geq 6$인 경우

함수 $g(X)$의 최솟값 $g(t) = -t^2 + 64 > 0$이므로 $-8 < t < 8$이다.

그러므로 $6 \leq t < 8$이다.

(ii) $t < 6$인 경우

함수 $g(X)$의 최솟값 $g(6) = 100 - 12t > 0$이므로 $t < \frac{25}{3}$이다.

그러므로 $t < 6$이다.

(i), (ii)에 의해 주어진 부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 t의 범위는 $t < 8$이다.

– 문항 2–

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	넓이 $S(\theta)$를 θ에 대한 식으로 표현해 낼 수 있다.	3
	$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} S(\theta)d\theta$의 값을 정확히 구할 수 있다.	5
	덧셈정리를 이용하여 $\sin\frac{\pi}{12}$의 값을 구할 수 있다.	2
[2-2]	탄젠트 덧셈정리를 이용하여 $f(t)$에 대한 관계식을 구할 수 있다.	5
	합성함수의 미분법을 이용하여 $t=1$일 때 $f'(t)$의 값을 구할 수 있다.	5
	음함수의 미분법과 $t=1$일 때 $f'(t)$의 값을 이용하여 $\frac{d\theta}{dt}$의 값을 구할 수 있다.	5
	$t=1$일 때 $\frac{d\theta}{dt}$의 값을 이용하여 $\frac{dS(\theta)}{dt}$의 값을 구할 수 있다.	5

2. 예시 답안

[2-1]

선분 AP와 원 C의 접점을 D라 하면 넓이 선분 AP와 x축, 그리고 원 C로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(\theta)$는 사각형 CBPD의 넓이에서 부채꼴 CBD의 넓이를 뺀 값과 같다.

점 P의 x좌표가 $f(t)$이므로 사각형 CBPD의 넓이는 $f(t)-t$이고 삼각형 PBC에서 $\tan\theta = \frac{1}{f(t)-t}$이므로

$f(t)-t = \cot\theta \cdots$①라 둘 수 있다. 부채꼴 CBD의 넓이는 $\frac{1}{2}(\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$이므로

$S(\theta) = \cot\theta - \frac{\pi}{2} + \theta$이다.

따라서 $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} S(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\cot\theta - \frac{\pi}{2} + \theta\right)d\theta = \left[\ln(\sin\theta) - \frac{\pi}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta^2\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}$

$$= \left(\ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{72}\right) - \left(\ln\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{288}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{32}\pi^2$$

이다. ($\because \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)

[2-2]

삼각형 CPB에서 $\tan\theta = \frac{1}{f(t)-t}$이고 삼각형 APO에서 $\tan 2\theta = \frac{3}{f(t)}$이다.

제시문 (다)의 탄젠트 덧셈정리에 의해 $\frac{3}{f(t)} = \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{\frac{2}{f(t)-t}}{1-\frac{1}{(f(t)-t)^2}}$ 에서

$f(t)^2 - 4tf(t) + 3t^2 - 3 = 0 \cdots$ ②이다.

$t=1$일 때 $f(1)=4$이고 ②의 양변을 t에 대해 미분하면

$2f(t)f'(t) - 4f(t) - 4tf'(t) + 6t = 0$에서 $t=1$를 대입하면 $f'(1) = \frac{5}{2}$이다.

①에서 $t=1$일 때, $\cot\theta = 3$이므로 $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta = 10$이다.

①의 양변을 t에 대해 미분하면 $f'(t) - 1 = -\csc^2\theta\frac{d\theta}{dt}$에서 $t=1$을 대입하면

$f'(1) - 1 = -10\frac{d\theta}{dt}$이므로 $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{20}$이다.

$S(\theta) = \cot\theta - \frac{\pi}{2} + \theta$의 양변을 t에 대해 미분하면 $\frac{dS(\theta)}{dt} = -\csc^2\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta}{dt}$이므로

$$\therefore \frac{dS(\theta)}{dt} = -10 \times \left(-\frac{3}{20}\right) - \frac{3}{20} = \frac{27}{20}$$

– 문항 3–

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	$\mathrm{P}(X=0)$의 값을 구할 수 있다.	3
	$\mathrm{P}(X=1)$의 값을 구할 수 있다.	5
	여사건의 확률을 이용하여 $\mathrm{P}(X \geq 2)$의 값을 구할 수 있다.	2
[3-2]	$\mathrm{P}(X=m)$의 식을 서술할 수 있다.	5
	$\mathrm{P}(X=m)$이 최대가 되는 조건을 서술할 수 있다.	5
	조합의 성질을 이용하여 최대인 m의 값을 구할 수 있다.	5
[3-3]	조합의 성질을 이용하여 $\frac{1}{k+1} \times \mathrm{P}(X=k)$의 식을 변형할 수 있다.	7
	제시문(다)를 이용하여 이항계수의 성질을 서술할 수 있다.	5
	이항계수의 값을 이용하여 $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \times \mathrm{P}(X=k)$의 값을 구할 수 있다.	3

2.예시 답안

[3-1]

$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X=0) - \mathrm{P}(X=1)$의 값이다.

(ⅰ) $X=0$은 앞면과 뒷면이 변화하는 횟수가 0이므로 모두 H 또는 T이다.

$$\mathrm{P}(X=0) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} = \frac{1}{2^{24}}$$

(ⅱ) $X=1$은 동전을 25번 던져서 나오는 앞면과 뒷면을 차례로 적었을 때, 앞면과 뒷면이 변화하는 횟수가 총 1번이다. 동전과 동전 사이에 칸막이를 설치할 수 있을 때 앞면과 뒷면의 변화가 있으면 칸막이를 설치한다. 아래의 그림과 같이 동전과 동전 사이에 있는 24개의 칸 중에서 $k(1 \leq k \leq 24)$번째에 칸막이를 설치하면 칸막이를 기준으로 앞면과 뒷면의 변화가 1번 발생한다.

$$\mathrm{H}\ \mathrm{H}\ \cdots\ \underset{}{\overset{(k\text{번째 칸})}{\mathrm{H} \,\|\, \mathrm{T}}}\ \cdots\ \mathrm{T}\ \mathrm{T} \quad \text{또는} \quad \mathrm{T}\ \mathrm{T}\ \cdots\ \overset{(k\text{번째 칸})}{\mathrm{T} \,\|\, \mathrm{H}}\ \cdots\ \mathrm{H}\ \mathrm{H}$$

$\mathrm{P}(X=1)$은 24개의 칸 중에서 $k(1 \leq k \leq 24)$번째에 칸막이를 설치할 확률과 같으므로

$$\mathrm{P}(X=1) = {}_{24}\mathrm{C}_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{25-k} \times 2 = \frac{24}{2^{24}}$$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 값은 $\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \frac{1}{2^{24}} - \frac{24}{2^{24}} = 1 - \frac{25}{2^{24}}$ 이다.

[3-2]

$\mathrm{P}(X=m)$의 값은 동전과 동전 사이에 있는 24개의 칸 중에서 m개의 칸막이를 설치하고 앞면과 뒷면이 나오는 확률을 구하는 것과 같다.

$$\mathrm{P}(X=m)={}_{24}\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{25-k}\times 2=\frac{{}_{24}\mathrm{C}_m}{2^{24}}$$

이다.

한편, $\mathrm{P}(X=m)$의 값이 최대가 되려면 다음 식을 만족해야 한다.

$$\mathrm{P}(X=m-1)\le\mathrm{P}(X=m),\ \mathrm{P}(X=m)\ge\mathrm{P}(X=m+1)$$

$$\frac{{}_{24}\mathrm{C}_{m-1}}{2^{24}}\le\frac{{}_{24}\mathrm{C}_m}{2^{24}},\ \frac{{}_{24}\mathrm{C}_m}{2^{24}}\ge\frac{{}_{24}\mathrm{C}_{m+1}}{2^{24}}$$

$$\frac{24!}{(m-1)!\times(25-m)!}\le\frac{24!}{m!\times(24-m)!},\ \frac{24!}{m!\times(24-m)!}\ge\frac{24!}{(m+1)!\times(23-m)!}$$

$$m\le 25-m,\ m+1\ge 24-m$$

$$\frac{23}{2}\le m\le\frac{25}{2}$$

이므로 만족하는 m의 값은 12이다.

[3-3]

[3-2]에서 $m=12$이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}\times\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{11}\frac{1}{k+1}\times\frac{{}_{24}\mathrm{C}_k}{2^{24}}$ 이다.

한편,

$$\frac{1}{k+1}\times\frac{{}_{24}\mathrm{C}_k}{2^{24}}=\frac{1}{k+1}\times\frac{24!}{k!\times(24-k)!}\times\frac{1}{2^{24}}$$

$$=\frac{25!}{(k+1)!\times\{25-(k+1)\}!}\times\frac{1}{25\times 2^{24}}={}_{25}\mathrm{C}_{k+1}\times\frac{1}{25\times 2^{24}}$$

이므로 주어진 식의 값은

$$\sum_{k=0}^{11}\frac{1}{k+1}\times\frac{{}_{24}\mathrm{C}_k}{2^{24}}=\sum_{k=0}^{11}{}_{25}\mathrm{C}_{k+1}\times\frac{1}{25\times 2^{24}}=\frac{1}{25\times 2^{24}}\left({}_{25}\mathrm{C}_1+{}_{25}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{12}\right)$$

이다.

제시문 (다)를 통해 $2^{25}={}_{25}\mathrm{C}_0+{}_{25}\mathrm{C}_1+{}_{25}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{25}$이고, ${}_{25}\mathrm{C}_k={}_{25}\mathrm{C}_{25-k}$를 이용하면

$${}_{25}\mathrm{C}_0+{}_{25}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{12}={}_{25}\mathrm{C}_{13}+{}_{25}\mathrm{C}_{14}+\cdots+{}_{25}\mathrm{C}_{25}=2^{25-1}=2^{24}$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k+1}\times\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{25\times 2^{24}}\times\left(2^{24}-1\right)=\frac{1}{50}\left(2-\frac{1}{2^{23}}\right)$$

이다.

따라서 a의 값은 $2-\dfrac{1}{2^{23}}$이다.