2021학년도 수시모집 논술고사 채점기준 및 예시답안(자연계)

- 문항 1-

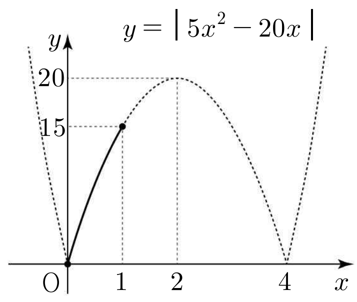
1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	함수 $y=\left\|5x^2-20x\right\|=\left\|5(x-2)^2-20\right\|$ 으로 나타낼 수 있다.	4
	최댓값을 구할 수 있다.	6
[1-2]	$t \geq 5$ 일 때 함수 $g(t)$ 를 구할 수 있다.	4
	$g(\alpha)=\dfrac{t^2}{5}$ 되는 α 를 구할 수 있다.	3
	$5(\sqrt{2}-1) \leq t < 5$ 일 때, 함수 $g(t)$ 를 구할 수 있다.	4
	$0 < t < 5(\sqrt{2}-1)$ 일 때, 함수 $g(t)$ 를 구할 수 있다.	4
[1-3]	$a < 15-10\sqrt{2}$ 일 때, 함수 $h(a)$ 를 구할 수 있다.	2
	$a = 15-10\sqrt{2}$ 일 때, 함수 $h(a)$ 를 구할 수 있다.	2
	$15-10\sqrt{2} < a < 5$ 일 때, 함수 $h(a)$ 를 구할 수 있다.	2
	$a \geq 5$ 일 때, 함수 $h(a)$ 를 구할 수 있다.	2
	함수 $h(a)$ 가 $a=k$ 에서 불연속인 모든 k 의 값의 합을 구할 수 있다.	2

2. 예시 답안

[1-1]

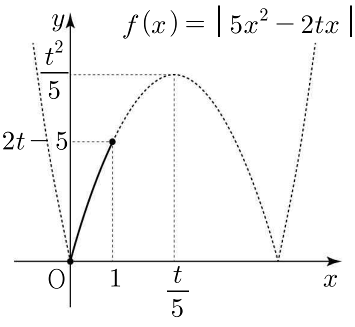
함수 $y=\left|5x^2-20x\right|=\left|5(x-2)^2-20\right|$ 이므로 함수의 그래프는 그림과 같다.
따라서 제시문 (가)에 의해 함수 $y=\left|5x^2-20x\right|$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 15 를 갖는다.



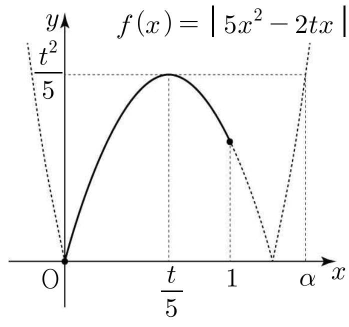
[1-2]

$f(x) = |5x^2 - 2tx| = \left|5\left(x - \frac{t}{5}\right)^2 - \frac{t^2}{5}\right|$ 이다.

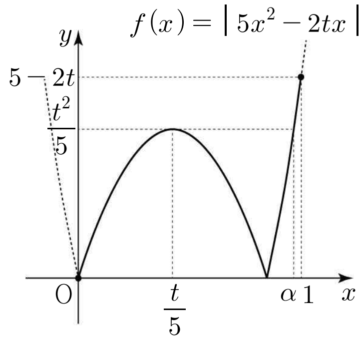
$\frac{t}{5} \geq 1$, $\frac{t}{5} < 1 \leq \alpha$, $\alpha < 1$ 의 범위에 따라 다음과 같이 세 가지로 나뉜다.



$\frac{t}{5} \geq 1$ 의 경우



$\frac{t}{5} < 1 \leq \alpha$ 의 경우



$\alpha < 1$ 의 경우

(i) $\frac{t}{5} \geq 1$, 즉 $t \geq 5$일 때 $g(t) = f(1) = |5 - 2t| = 2t - 5$이다.

(ii) $\frac{t}{5} < 1 \leq \alpha$일 때, 여기서 $5x^2 - 2tx = \frac{t^2}{5}$가 성립하는 x를 α라 두면 $5\alpha^2 - 2t\alpha = \frac{t^2}{5}$이다.

$25\alpha^2 - 10t\alpha - t^2 = 0$이고 근을 구하면

$$\alpha = \frac{5t \pm 5\sqrt{2}\,t}{25} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{5}t$$

이다.

$\alpha > \frac{t}{5}$ 이므로 $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{5}t$ 이다.

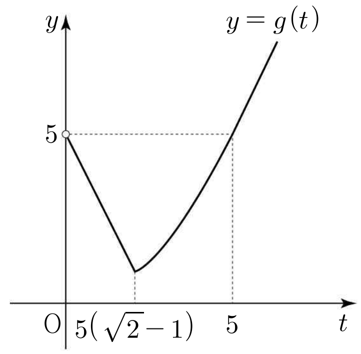
그러므로 $\frac{t}{5} < 1 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{5}t$, 즉 $5(\sqrt{2}-1) \leq t < 5$일 때

$$g(t) = f\left(\frac{t}{5}\right) = \left|-\frac{t^2}{5}\right| = \frac{t^2}{5}$$

이다.

(iii) $0 < \frac{1+\sqrt{2}}{5}t < 1$, 즉 $0 < t < 5(\sqrt{2}-1)$일 때

$g(t) = f(1) = |5 - 2t| = 5 - 2t$ 이다.



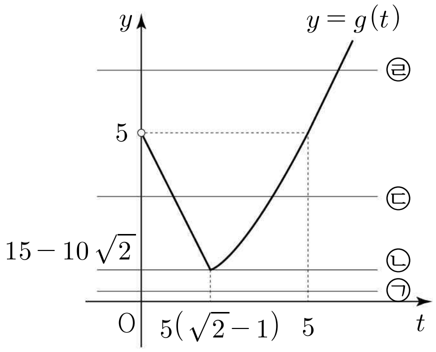
따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 함수 $g(t)$는

$$g(t) = \begin{cases} 5 - 2t & (0 < t < 5(\sqrt{2}-1)) \\ \frac{t^2}{5} & (5(\sqrt{2}-1) \leq t < 5) \\ 2t - 5 & (t \geq 5) \end{cases}$$

이고 함수 $y = g(t)$의 그래프는 그림과 같다.

[1-3]

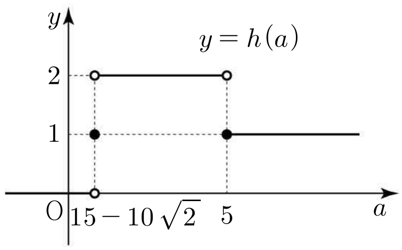
$t>0$에서 직선 $y=a$와 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=a$와 함수 $y=g(t)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 ㉠이면 0, ㉡이면 1, ㉢이면 2, ㉣이면 1이다. 함수 $h(a)$는

$$h(a)=\begin{cases} 0 & (a<15-10\sqrt{2}) \\ 1 & (a=15-10\sqrt{2}) \\ 2 & (15-10\sqrt{2}<a<5) \\ 1 & (a\geq 5) \end{cases}$$

이고 함수 $y=h(a)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수 $h(a)$가 $a=k$에서 불연속이 되는 k의 값을 구하면 $k=15-10\sqrt{2}$ 또는 $k=5$이다.
따라서 모든 k의 값의 합은 $20-10\sqrt{2}$이다.

- 문항 2-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	$h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x+\left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)x$ 로 나타낼 수 있다.	6
	함수 $h(x)$가 최솟값을 갖는 사실을 이용하여 $h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x$ 임을 나타낼 수 있다.	5
	함수 $h(x)$가 주기함수가 되는 이유를 설명할 수 있다.	4
[2-2]	$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ 을 이용하여 a를 구할 수 있다.	6
	$f(x)=0$ 의 한 근이 $\pi-\frac{1}{2}$ 임을 구할 수 있다.	4
	$\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{3}{2}$ 을 구할 수 있다.	5

2. 예시 답안

[2-1]

함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
h(x)&=\int_0^x\{3(\pi+\cos t)^2+a(\pi+\cos t)+b\}dt\\
&=\int_0^x\{3\cos^2 t+(6\pi+a)\cos t+3\pi^2+\pi a+b\}dt\\
&=\int_0^x\left\{3\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right)+(6\pi+a)\cos t+3\pi^2+\pi a+b\right\}dt\\
&=\int_0^x\left\{\frac{3}{2}\cos 2t+(6\pi+a)\cos t+3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right\}dt\\
&=\left[\frac{3}{4}\sin 2t+(6\pi+a)\sin t+\left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)t\right]_0^x\\
&=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x+\left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)x
\end{aligned}$$

한편, $3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\neq 0$이면 함수 $h(x)$의 그래프는 주기를 가지면서 직선 $y=\left(3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}\right)x$에 의해 증가 형태 또는 감소 형태이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체에서 최솟값을 가지지 않는다.

따라서 $3\pi^2+\pi a+b+\frac{3}{2}=0$이고 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x$$

사인함수의 성질에 의해

$$h(x+2\pi)=\frac{3}{4}\sin(2x+4\pi)+(6\pi+a)\sin(x+2\pi)$$
$$=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x$$
$$=h(x)$$
이므로 $h(x)$ 는 주기함수이다.

[2-2]

함수 $h(x)=\frac{3}{4}\sin 2x+(6\pi+a)\sin x$ 는 미분가능하고, $x=\frac{2}{3}\pi$에서 최솟값을 가지므로 $h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$ 이다.

$$h'(x)=\frac{3}{2}\cos 2x+(6\pi+a)\cos x$$

이고,

$$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(6\pi+a)=-3\pi-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}a=0$$

이므로 $a=-6\pi-\frac{3}{2}$이다.

$3\pi^2+\pi\left(-6\pi-\frac{3}{2}\right)+b+\frac{3}{2}=0$ 이므로 $b=3\pi^2+\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{2}$이다.

또한,

$$h'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=f\left(g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)=f\left(\pi-\frac{1}{2}\right)=0$$

이므로 $f(x)=0$ 은 $\pi-\frac{1}{2}$ 을 근으로 갖는다.

한편, $f(x)=3x^2+ax+b$이므로 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면, 이때 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{3}=2\pi+\frac{1}{2},\ \alpha\beta=\frac{b}{3}=\pi^2+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

이고,

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(2\pi+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\pi^2+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

이다. 따라서 $|\alpha-\beta|=\frac{3}{2}$ 이다.

- 문항 3 -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	장소 B, C 에서 비감염자가 바이러스에 감염될 확률을 조건부확률과 확률의 곱셈정리를 이용해서 구할 수 있다.	3
	장소 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ 에서 발생하는 감염자 수의 경우를 구별할 수 있다.	3
	이항분포를 이용하여 각각의 경우마다 감염자가 발생할 확률을 구할 수 있다.	9
[3-2]	장소 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ 에서 발생하는 감염자 수의 경우를 구별하고 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	6
	감염자 발생 장소 따라 마스크 착용자의 수를 구별하여 경우의 수를 구할 수 있다.	10
	비감염자가 마스크 착용자인 경우와 미착용자인 경우를 구별하여 경우의 수를 구할 수 있다.	4

2.예시 답안

[3-1]

장소 B와 장소 C의 비감염자가 바이러스에 감염되는 사건을 D, 비감염자가 마스크를 착용하는 사건을 M이라 하자.

$\mathrm{P}(M) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(D|M) = \frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(D|M^C) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D) &= \mathrm{P}(D\cap M) + \mathrm{P}(D\cap M^C) \\ &= \mathrm{P}(D|M)\times \mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(D|M^C)\times \mathrm{P}(M^C) \\ &= \frac{1}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{20}+\frac{1}{4} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

이다.

장소 A 에서 비감염자가 바이러스에 감염되는 인원수를 확률변수 X_A, 장소 B 에서 비감염자가 바이러스에 감염되는 인원수를 확률변수 X_B라 하면 확률변수 X_A, X_B는 각각 이항분포 $\mathrm{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(2, \frac{3}{10}\right)$를 따른다. 장소 C 에서 비감염자가 바이러스에 감염되는 인원수를 확률변수 X_C라 하자.

(i) $X_A = 1, X_B = 1, X_C = 0$ 인 경우

$$p_1 = {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)\times\frac{7}{10} = \frac{3}{2^3}\times\frac{2\times3\times7}{10^2}\times\frac{7}{10} = \frac{2\times3^2\times7^2}{2^6\times5^3}$$

(ii) $X_A = 1, X_B = 0, X_C = 1$ 인 경우

$$p_2 = {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{7}{10}\right)^2\times\frac{3}{10} = \frac{3}{2^3}\times\frac{7^2}{10^2}\times\frac{3}{10} = \frac{3^2\times7^2}{2^6\times5^3}$$

(iii) $X_A = 0, X_B = 1, X_C = 1$ 인 경우

$$p_3 = {}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_2C_1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) \times \frac{3}{10} = \frac{1}{2^3} \times \frac{2\times3\times7}{10^2} \times \frac{3}{10} = \frac{2\times3^2\times7}{2^6\times5^3}$$

그러므로 구하는 확률은

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{2\times3^2\times7^2}{2^6\times5^3} + \frac{3^2\times7^2}{2^6\times5^3} + \frac{2\times3^2\times7}{2^6\times5^3} = \frac{3^2\times7}{2^6\times5^3}\times(14+7+2) = \frac{3^2\times7}{2^6\times5^3}\times23$$

이다.

따라서 $\alpha = 23$ 이다.

[3-2]

(i) 감염자가 장소 A 에서 1 명, 장소 B 에서 1 명이 발생하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_0 = 6$ 이고

① 마스크 착용자 수가 1 명일 때의 경우의 수 : 장소 B 에만 있으므로 ${}_2C_1 = 2$

② 마스크 착용자 수가 2 명일 때의 경우의 수 : ${}_3C_2 = 3$

③ 마스크 착용자 수가 3 명일 때의 경우의 수 : ${}_3C_3 = 1$

따라서 $6\times(2+3+1) = 6\times6 = 36$

(ii) 감염자가 장소 A 에서 1 명, 장소 C 에서 1 명이 발생하는 경우의 수는 ${}_3C_1 \times {}_2C_0 \times {}_1C_1 = 3$ 이고

① 마스크 착용자 수가 1 명일 때의 경우의 수 : 장소 B 에만 있으므로 ${}_2C_1 = 2$

② 마스크 착용자 수가 2 명일 때의 경우의 수 : ${}_3C_2 = 3$

③ 마스크 착용자 수가 3 명일 때의 경우의 수 : ${}_3C_3 = 1$

따라서 $3\times(2+3+1) = 3\times6 = 18$

(iii) 감염자가 장소 B 에서 1 명, 장소 C 에서 1 명이 발생하는 경우의 수는 ${}_3C_0 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 = 2$ 이고

① 마스크 착용자 수가 1 명일 때의 경우의 수 : 장소 B 에만 있으므로 ${}_2C_1 = 2$

② 마스크 착용자 수가 2 명일 때의 경우의 수는

장소 B 에 2 명이 마스크 착용자인 경우의 수와 장소 B 의 비감염자와 장소 C 의 감염자가 마스크를 쓴 경우의 수의 합이므로 ${}_2C_2 + {}_1C_1 \times {}_1C_1 = 2$

③ 마스크 착용자 수가 3 명일 때의 경우의 수는 마스크 착용자인 감염자 수가 2 명이므로 없음.

따라서 $2\times(2+2) = 2\times4 = 8$

그러므로 총 경우의 수는 $36+18+8 = 62$ 이다.