# 2020학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 채점기준 및 예시답안(자연계)

## - 문항 1-

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [1-1] | 평균값의 정리를 사용할 수 있다. | 2 |
| | 평균값의 정리를 이용하여 대소관계를 구할 수 있다. | 3 |
| | 적분값의 범위를 구하고, $a$의 최댓값, $b$의 최솟값을 구할 수 있다. | 5 |
| [1-2] | $x=-\frac{1}{2}$에서 최대임을 그래프 또는 이차함수의 꼭지점을 이용하여 알 수 있다. | 2 |
| | 적분 구간을 나눌 수 있다. | 3 |
| | 각각의 범위에서 최댓값을 구할 수 있다. | 9 |
| | 적분값을 구할 수 있다. | 6 |

## 2. 예시 답안

**[1-1]**

$(1,3)$에 속하는 임의의 $x$에 대하여 평균값의 정리를 사용하면

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$인 $c$가 존재한다.

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)=f'(c)(x-1)$

$3 \le f'(c) \le 7$이고 $x-1>0$이므로

$3(x-1) \le f'(c)(x-1) \le 7(x-1)$

$$\int_1^3 3(x-1)dx \le \int_1^3 f(x)dx \le \int_1^3 7(x-1)dx$$

$$6 \le \int_1^3 f(x)dx \le 14$$

$a$의 최댓값 6, $b$의 최솟값 14

**[1-2]**

$f(x)=|x^2+x-2|$의 그래프를 그려보자

$x=-\frac{1}{2}$에서 최대이다.

범위로 나누어 생각하면 $(t \le -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2} \le t \le -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \le t \le 0)$

i ) $t+1 \le -\frac{1}{2}$일 때 즉 $t \le -\frac{3}{2}$

$f(x)$는 증가함수이므로 $g(t)=f(t+1)$

ⅱ) $t \le -\frac{1}{2} \le t+1$일 때 즉 $-\frac{3}{2} \le t \le -\frac{1}{2}$

$g(t)=f(-\frac{1}{2})=\frac{9}{4}$

ⅲ) $t \ge -\frac{1}{2}$이고 $t+1 \le 1$ 일 때, 즉 $-\frac{1}{2} \le t \le 0$

$f(x)$는 감소함수이므로 $g(t)=f(t)$

$$S=\int_{-2}^{-\frac{3}{2}} f(t+1)dt+\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{9}{4}dt+\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt+\frac{9}{4}+\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(t)dt=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\frac{9}{4}=\int_{-1}^{0} (-t^2-t+2)dt+\frac{9}{4}=\frac{53}{12}$$

## - 문항 2-

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [2-1] | 세 점을 지나는 평면의 방정식을 세울 수 있다. | 6 |
| | 점 H 는 $\mathrm{H}(t,\ 0,\ 0)$라 두고 $t$의 값을 구할 수 있다. | 6 |
| | $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(0,\ \sqrt{6}t,\ t)$를 이용 점 C 의 좌표를 구할 수 있다. | 8 |
| [2-2] | 두 벡터의 내적이 최댓값을 가질 때 조건을 구할 수 있다. | 6 |
| | $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 최대가 되는 조건을 구할수 있다. | 6 |
| | 내적의 최댓값을 구할 수 있다. | 8 |

## 2. 예시 답안

**[2-1]**

세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-4,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ -1,\ \sqrt{6})$을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=0$이라 두면

$$-4a=0,\ 3a-b+\sqrt{6}c=0$$

에서 $a=0$, $b=\sqrt{6}c$이고 평면의 방정식은

$$\sqrt{6}y+z=0$$

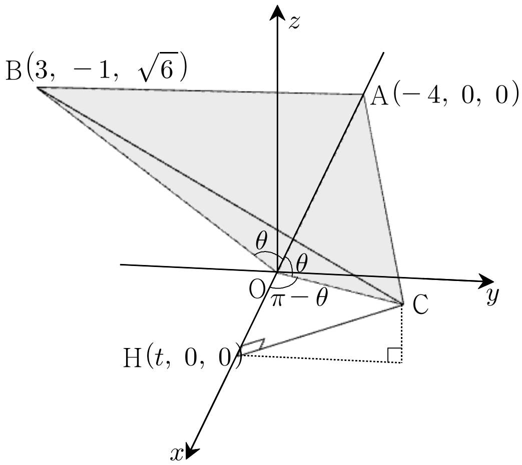
이다.

사면체 OABC 의 부피가 최대가 될 때, 점 C 의 평면 OAB 위로의 정사영 한 점 H 는 두 점 O, A 를 지나는 직선 위에 있다. 따라서 두 점 O, A 를 지나는 직선의 방정식은 $x$축이고, 점 H 는 $\mathrm{H}(t,\ 0,\ 0)$라 둘 수 있다.

$\angle AOB = \angle AOC = \angle BOD = \theta$ 라 두면

$\cos\theta = \frac{-12}{4 \cdot 4} = -\frac{3}{4}$ 이므로

$$\frac{t}{2} = \cos(\pi - \theta) = \frac{3}{4}$$




이다. 따라서 점 H 는 $H\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$ 이다.

한편, $C\left(\frac{3}{2},\ m,\ n\right)$ 라 두면, $\overrightarrow{CH} = (0,\ m,\ n)$ 이고

$\overrightarrow{CH} = (0,\ \sqrt{6}t,\ t)$ 로 둘 수 있다.

$|\overrightarrow{CH}| = \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7t^2}$ 이므로 $t = \pm\frac{1}{2}$ 이므로 점 C 의

좌표는

$$\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

이다.

**[2-2]**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

이므로 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ 의 최댓값은, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최대이면 된다.

여기서 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = (-4,0,0) \cdot (1,-3,\sqrt{6}) = -4$ 이고, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$ 가 최소이고 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}$ 가 최대가 되기 위해서는 점 C, D 가 평면 OAB 위에 있을 때, 즉,

$$\angle BOC = \angle DOA = 2\pi - 2\theta$$

이다. 그러므로

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 4 \times 2 \times \cos(2\pi - 2\theta) = 8\cos 2\theta$$

인데 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{8}$ 이므로 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$ 이다.

## — 문항 3—

## 1. 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| [3-1] | $n=4$ 일 때, 자연수 4를 분할하는 방법의 수를 구할 수 있다. | 3 |
| | $n=4$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다. | 7 |
| [3-2] | $X=1$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다. | 3 |
| | $X=2$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다. | 7 |
| | $X=3$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다. | 7 |
| | $X\geq 4$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다. | 3 |

## 2.예시 답안

**[3-1]**

$n=4$일 때, 자연수 $4$를 분할하는 방법이

$$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$$

이고 카드 $1$, $2$, $3$, $4$를 $1$개, $2$개, $3$개, $4$개의 집합으로 분할할 수 카드를 꺼내는 방법을 구하면

$$1\times 1+\left({}_4\mathrm{C}_3\times{}_1\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}\right)\times 2!+\left({}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{2!}\right)\times 3!+4!=75\text{ (가지)}$$

이다.

**[3-2]**

$X$를 주머니 속에 있는 카드를 꺼낸 횟수라 하면

( i ) $X=1$일 때, $10$장의 카드를 한 번에 모두 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 $1$(가지)이다.

( ii ) $X=2$일 때, $10$을 $2$개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+3=8+2=9+1$이다. 따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_7\times{}_3\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_8\times{}_2\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_9\times{}_1\mathrm{C}_1=120+45+10=175\text{ (가지)}$$

이다.

( iii ) $X=3$일 때, $10$을 $3$개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+2+1=6+3+1$이다. 따라서 구하는 경우의 수는

$${}_{10}\mathrm{C}_7\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_1\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_6\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_1\mathrm{C}_1=360+840=1200\text{ (가지)}$$

이다.

( iv ) $X\geq 4$이면 만족하는 자연수 분할이 존재하지 않는다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 개수는 $1+175+1200=1376$(가지)이다.