2020학년도 대학입학전형 대비 모의논술고사 채점기준 및 예시답안(의학계)

− 문항 1−

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	주어진 조건을 이용해서 점 R이 두 점 O, P로부터 거리의 합이 2로 일정한 점임을 밝힌다.	2
	$t=0$일 때 도형의 방정식을 구한다.	2
	$t=2$일 때 도형의 방정식을 구한다.	3
	$0<t<2$일 때 도형의 방정식을 구한다.	3
[1-2]	주어진 벡터를 적절하게 합으로 분할하여 나타낸다.	3
	$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}$을 t와 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OR}}\rvert = k\ (0<k<2)$를 이용하여 구한다.	3
	$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$을 구한다.	4
[1-3]	점 R이 두 점 M, T의 중점임을 밝힌다.	2
	점 Q의 좌표를 구하기 위한 관계식을 2가지 이상 찾아낸다.	4
	점 Q의 좌표를 구한다.	2
	$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}}$을 구한다.	2

2. 예시 답안

[1-1]

$\overline{\mathrm{OQ}}=2$이고, $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{PR}}$이므로 $\overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{PR}}=2$이다. 따라서 점 R은 두 점 O, P로부터 거리의 합이 2로 일정한 점이다.

ⅰ) $t=0$이면 점 P가 원점이 되므로 점 R이 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원과 같다. 따라서 $x^2+y^2=1$이다.

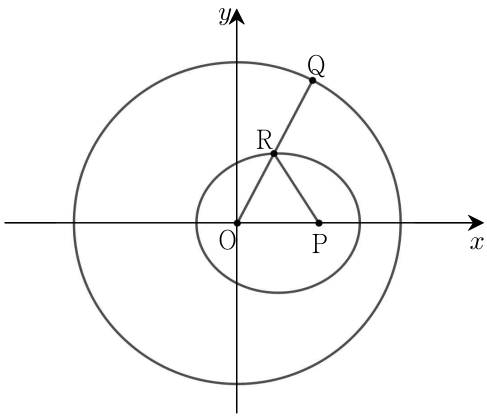
ⅱ) $t=2$이면 점 P가 점 A가 되고 $2=\overline{\mathrm{OA}} \le \overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{AR}} \le \overline{\mathrm{OR}}+\overline{\mathrm{PR}}=2$이므로 점 Q가 점 A가 아닌 위치에 있을 때, 점 R이 나타내는 도형은 $(0,0)$이고, 점 Q가 점 A의 위치에 있을 때, 점 R이 나타내는 도형은 $y=0\ (0 \le x \le 2)$이다.

ⅲ) $0<t<2$이면 점 R은 서로 다른 두 점 O, P로부터 거리의 합이 2로 일정한 점이 되어 타원 위의 점이 된다. 즉, $\mathrm{O}(0,0)$과 $\mathrm{P}(t,0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 2인 타원의 방정식은, 두 점 $\mathrm{O}'\left(-\frac{t}{2}, 0\right)$과 $\mathrm{P}'\left(\frac{t}{2}, 0\right)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 2인 타원을, x축 방향으로 $\frac{t}{2}$만큼 평행이동한 방정식과 같다. 따라서

$$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\frac{t^2}{4}}=1$$

이다.

[1-2]



$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ})=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}$과 같다. ⋯ ①

한편 $|\overrightarrow{OR}|=k\ (0<k<2)$라 두면, $|\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{PR}|=2-k$이다.

또한, $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{RP}-\overrightarrow{RO}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{PR}$이므로 $|\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{PR}|^2$이다.

$$t^2=k^2+(2-k)^2-2\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}$$

이므로 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}=k^2-2k+2-\frac{t^2}{2}$이다.

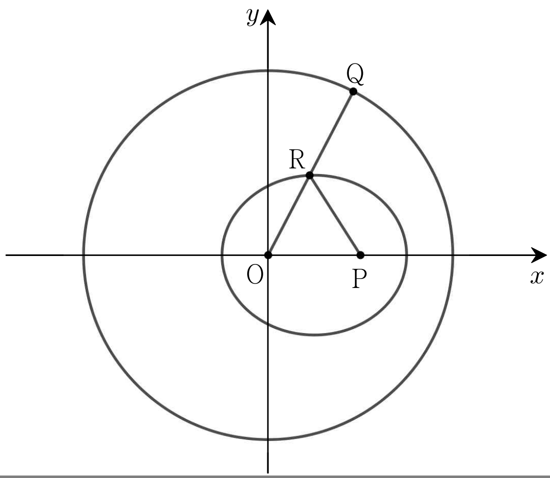
따라서 ①에

$$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}\cdot(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ})=k(2-k)+\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{PR}=2-\frac{t^2}{2}$$

이다.

[1-3]

$t=1$이면 점 R은 타원 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$ 위에 있다.



$\overrightarrow{\mathrm{RM}} = \overrightarrow{\mathrm{TR}}$ 에서 $\overrightarrow{\mathrm{RM}} + \overrightarrow{\mathrm{RT}} = \vec{0}$ 이므로 점 R은 두 점 M, T의 중점이어야 한다. … ①

ⅰ) 점 Q의 좌표를 (a, b) 라 하자. 그러면 $a^2 + b^2 = 4$ 이다.

ⅱ) 점 M은 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점이므로 $\mathrm{M}\left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다. 한편, 점 R은 두 직선 OQ와 MR의 교점이다.

직선 OQ의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x \quad \cdots \text{②}$$

이고, 직선 MR은 점 M을 지나고 직선 PQ에 수직이다. 직선 PQ의 기울기는 $\frac{b}{a-1}$ 이므로 직선 MR의 방정식은

$$y = \frac{1-a}{b}\left(x - \frac{a+1}{2}\right) + \frac{b}{2} \text{ 즉, } y = \frac{1-a}{b}x + \frac{3}{2b} \quad \cdots \text{③}$$

이다. 따라서 ②, ③에 의해서 $\frac{b}{a}x = \frac{1-a}{b}x + \frac{3}{2b}$ 가 되어 $x = \frac{3a}{2(4-a)}$ 즉, 점 R의 x 좌표는 $\frac{3a}{2(4-a)}$ 이다.

ⅲ) ①에 의해서 점 R의 x 좌표의 2배가 점 M의 x 좌표가 된다.

따라서 $2 \times \frac{3a}{2(4-a)} = \frac{a+1}{2}$ 을 만족하는 $a = 1$ 이다$(-2 \le a \le 2)$.

이를 만족하는 점 Q의 좌표는 $(1, \sqrt{3})$ 이 된다.

따라서 점 R은 타원의 단축 위의 꼭짓점이 되어

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

이다.

– 문항 2–

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	정적분과 미분의 관계를 적용시킬 수 있다.	5
	문제의 조건 $f(x) \le u(x)$를 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.	5
[2-2]	주어진 부등식을 $u(x) \le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 로 바꾼 후, $h(x) = \frac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}}$ 로 둘 수 있다.	5
	$h(x) = \frac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}}$ 의 양변을 미분할 수 있다.	5
	$e^{\int_0^x g(s)ds}\{u'(x) - u(x)g(x)\} \le 0$ 임을 보일 수 있다.	5
	$h(0) = u(0) = C$임을 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.	5

2. 예시 답안

[2-1]

$u(t) = C + \int_0^t f(s)g(s)ds$ 의 양변을 t 에 대해 미분하면 $u'(t) = f(t)g(t)$

$u'(t) = f(t)g(t)$ 에 $f(x) \le C + \int_0^x f(s)g(s)ds$ 를 적용하면 $u'(t) = f(t)g(t) \le u(t)g(t)$

[2-2]

$f(x) \le u(x)$ 이므로 $u(x) \le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 임을 보이면 된다. 여기서 $h(x) = \frac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}}$ 라 하자.

양변을 미분하면 $h'(x) = \frac{u'(x)e^{\int_0^x g(s)ds} - u(x)e^{\int_0^x g(s)ds}g(x)}{\left(e^{\int_0^x g(s)ds}\right)^2}$ 이다.

[2-1]에 의해 $e^{\int_0^x g(s)ds}\{u'(x) - u(x)g(x)\} \le 0$ 이다.

또한, $h(0) = u(0) = C$이므로 $h(x) \le C$ 즉, $\frac{u(x)}{e^{\int_0^x g(s)ds}} \le C$이므로 $u(x) \le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 이고,

$f(x) \le Ce^{\int_0^x g(s)ds}$ 가 성립한다.

- 문항 3 -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	$X=2$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다.	4
	$X=3$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다.	4
	$X \geq 4$ 일 때, 카드를 꺼내는 방법의 수를 구할 수 있다.	2
[3-2]	n_i 중 적어도 하나가 1일 때, $M(n)$이 최댓값을 가지는 조건을 구할 수 있다.	2
	n_i가 홀수인 소수일 때의 경우를 나누어 구할 수 있다.	10
	$M(n)$이 가장 큰 곱을 가지는 경우를 구할 수 있다.	3
	$M(40)$의 값을 구할 수 있다.	5
	$p+q$의 값을 구할 수 있다.	10

2. 예시 답안

[3-1]

X를 주머니 속에 있는 카드를 꺼낸 횟수라 하면

(i) $X=1$일 때, 10장의 카드를 한 번에 모두 꺼내야 하므로 구하는 경우의 수는 1(가지)이다.

(ii) $X=2$일 때,

10을 2개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+3=8+2=9+1$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_7 \times {}_3\mathrm{C}_3 + {}_{10}\mathrm{C}_8 \times {}_2\mathrm{C}_2 + {}_{10}\mathrm{C}_9 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 120+45+10 = 175$(가지)

(iii) $X=3$일 때,

10을 3개의 자연수로 분할한 것 중 만족하는 경우는 $10=7+2+1=6+3+1$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_7 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1 + {}_{10}\mathrm{C}_6 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 360+840 = 1200$(가지)

(iv) $X \geq 4$이면 만족하는 자연수 분할이 존재하지 않는다.

그러므로 주어진 조건을 만족하는 개수는 $1+175+1200=1376$(가지)이다.

[3-2]

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$에 대하여 $n_i \geq 1$이므로 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) n_i 중 적어도 하나가 1일 때,

일반성을 잃지 않고 $n_k=1$라 가정하면

$$n = \underbrace{n_1+n_2+\ \cdots\ +n_{k-1}+1}_{k\text{개}} = \underbrace{n_1+n_2+\ \cdots\ +(n_{k-1}+1)}_{(k-1)\text{개}}$$

이다. 이 때,

$n_1 \times n_2 \times\ \cdots\ \times (n_{k-1}+1) - n_1 \times n_2 \times\ \cdots\ \times n_{k-1} \times 1 = n_1 \times n_2 \times\ \cdots\ \times n_{k-1} > 0$

이므로 $M(n)$이 최댓값을 가지려면 n_i는 2이상이다.

(ⅱ) n_i가 홀수인 소수일 때,

㉠ $n_i=3$이면 $3=2+1$이고 $3>2\times1$이므로 3은 그대로 사용한다.

㉡ $n_i>3$인 홀수인 소수이면

2이상인 두 자연수 m_1, m_2에 대하여 $n_i=m_1+m_2$로 나타낼 수 있다.

$$m_1\times m_2=m_1(n_i-m_1)=-m_1^2+n_im_1=-\left(m_1-\frac{n_i}{2}\right)^2+\frac{n_i^2}{4}$$

$m_1=\dfrac{n_i}{2}$에서 $m_1\times m_2$의 곱이 최대를 가진다. 하지만 n_i가 홀수이므로 두 수 m_1, m_2의 곱이 최대가 되는 경우는 $\dfrac{n_i}{2}$에 가까운 두 자연수일 때, 즉

$$n_i=\frac{n_i-1}{2}+\frac{n_i+1}{2}$$

이고 $n_i\le\dfrac{n_i-1}{2}\times\dfrac{n_i+1}{2}$를 만족하는 n_i의 범위를 구하면

$$n_i\ge2+\sqrt{5}=4.\times\times\times$$

그러므로 n_i가 5이상인 홀수인 소수인 경우 2이상 n_i보다 작은 두 수로 분할하여 곱한 값이 크다.

(ⅲ) $n_i\ge6$인 합성수일 때,

$$6=2+2+2=4+2=3+3$$

으로 분할할 수 있으며 가장 큰 곱은 3^2이다.

따라서 6보다 큰 자연수의 경우 위의 (ⅱ), (ⅲ)의 경우를 반복할 수 있고, $M(n)$이 가장 큰 곱을 가지려면 n_i는 2, 3, 4의 자연수로 구성된다.

(1) $n=40$일 때,

$$40=\underbrace{3+3+\cdots+3}_{12\text{개}}+2+2=\underbrace{3+3+\cdots+3}_{12\text{개}}+4$$

로 분할할 수 있고

$M(40)=3^{12}\times4$ 이다.

(2) 한편 카드를 뽑는 방법의 수는

$$\left({}_{40}C_3\times{}_{37}C_3\times\cdots\times{}_{7}C_3\times{}_{4}C_2\times{}_{2}C_2\times\frac{1}{12!}\times\frac{1}{2!}\right)\times14!$$

$$+\left({}_{40}C_3\times{}_{37}C_3\times\cdots\times{}_{7}C_3\times{}_{4}C_4\times\frac{1}{12!}\right)\times13!$$

$$=\frac{91}{4}\times\frac{40!}{6^{12}}+\frac{13}{24}\times\frac{40!}{6^{12}}=\frac{559}{24}\times\frac{40!}{6^{12}}=\frac{559}{4}\times\frac{40!}{6^{13}}$$

따라서 구하는 $p+q=559+4=563$이다.