2020학년도 수시모집 논술고사 채점기준 및 예시답안(자연계)

- 문항 1-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(3)$ 이 가질 수 있는 값의 경우의 수를 바르게 구한다.	3
	$f(2)$ 가 가질 수 있는 값의 경우의 수를 바르게 구한다.	3
	$f(1)$ 이 가질 수 있는 값의 경우의 수를 바르게 구한다.	3
	$g(n)$ 을 바르게 구한다.	1
[1-2]	$h(1)$ 의 값을 바르게 구한다.	5
	$2 \le n \le 5$ 에서 $h(n)$ 을 만족하는 함수의 개수를 구하는 과정을 바르게 서술한다.	3
	$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값과 공역의 원소 사이의 관계를 이용한 방정식을 바르게 구한다.	6
	$h(n)$ 을 n에 관한 식으로 바르게 구한다.	6

2. 예시 답안

[1-1]

$1 \le n \le 7$ 에 대하여

$$f(1) \ge n+1,\ f(2) \ge n+2,\ f(3) \ge n+3$$

이므로 $n+1 \le f(1) \le 10,\ n+2 \le f(2) \le 10,\ n+3 \le f(3) \le 10$ 을 만족해야 한다.

(1) 우선 $f(3)$ 의 값을 정하자. $f(3)$ 은 $n+3$ 이상 10 이하의 자연수 중 하나의 값을 가질 수 있다.

$$10-(n+3)+1 = 8-n\text{(가지)}$$

(2) $f(2)$ 는 $n+2$ 이상 10 이하의 자연수 중 $f(3)$ 이 아닌 하나의 값을 가질 수 있다.

$$10-(n+2)+1-1 = 8-n\text{ (가지)}$$

(3) $f(1)$ 은 $n+1$ 이상 10 이하의 자연수 중 $f(2)$ 와 $f(3)$ 이 아닌 하나의 값을 가질 수 있다.

$$10-(n+1)+1-2 = 8-n\text{ (가지)}$$

따라서 일대일함수 f 의 개수 $g(n)$ 은 $(8-n)^3$ (단, $n \le 7$)이다.

[1-2]

(1) $n=1$ 일 때, $f(2)-f(1) \ge 0$, $f(3)-f(2) \ge 0$이므로 $f(1) \le f(2) \le f(3)$을 만족하는 함수 f 의 개수는 집합 B의 원소 10 개 중에서 중복을 허락하여 3 개를 뽑는 경우의 수와 같다. 따라서 $h(1) = {}_{10}\mathrm{H}_3 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$

(2) $n \ge 2$ 일 때, $f(x+1)-f(x) \ge n-1 \ \ (x=1,\,2)$ 을 만족하는 함수 f 는

$$f(2) \ge f(1)+n-1,\ f(3) \ge f(2)+n-1$$

을 만족한다.

따라서 $f(1)$과 $f(2)$, $f(2)$와 $f(3)$ 사이에는 $n-2$개 이상의 집합 B의 원소가 존재한다.
이때,

$f(1)$보다 작은 집합 B의 원소의 개수를 a,
$f(1)$보다 크고 $f(2)$보다 작은 집합 B의 원소의 개수를 b,
$f(2)$보다 크고 $f(3)$보다 작은 집합 B의 원소의 개수를 c,
$f(3)$보다 큰 집합 B의 원소의 개수를 d

라 하면 $a+b+c+d=7$ $(a \geq 0, b \geq n-2, c \geq n-2, d \geq 0)$을 만족한다.

$$b'=b-(n-2),\ c'=c-(n-2)$$

이라 하면

$$a+b'+c'+d=7-2(n-2)=11-2n\ (a, b', c', d \geq 0)$$

이 되어 $h(n)$은 방정식 $a+b'+c'+d=11-2n$ $(a, b', c', d \geq 0)$의 해의 개수와 같다.
따라서 $2 \leq n \leq 5$일 때, $h(n)={}_4\mathrm{H}_{11-2n}={}_{14-2n}\mathrm{C}_{11-2n}={}_{14-2n}\mathrm{C}_3$이다.

그러므로 $h(n)=\dfrac{(14-2n)(13-2n)(6-n)}{3}$이다.

– 문항 2–

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	$\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OT}}=2$, $\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{OT}}=2$를 구할 수 있다.	1
	곡선 C_1의 방정식 $(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x \geq 2,\ y \geq 0)$을 구할 수 있다. 곡선 C_2의 방정식 $\dfrac{x^2}{3}-(y-2)^2=-1(x \geq 0,\ y \geq 2)$을 구할 수 있다.	6
	곡선 C_1의 점근선의 방정식 $y=\sqrt{3}(x-2)$을 구할 수 있다. 곡선 C_2의 점근선의 방정식 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$을 구할 수 있다.	4
	곡선 C_1의 점근선의 기울기를 이용하여 $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{3}$임을 찾고, a의 최댓값 $\dfrac{\pi}{3}$를 구할 수 있다. 곡선 C_2의 점근선의 기울기를 이용하여 $\dfrac{\pi}{6} < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$임을 찾고, b의 최솟값 $\dfrac{\pi}{6}$를 구할 수 있다.	4
[2-2]	교점 R의 좌표를 구할 수 있다.	5
	곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	5
	곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.	5
	두 접선이 이루는 예각을 구할 수 있다.	5

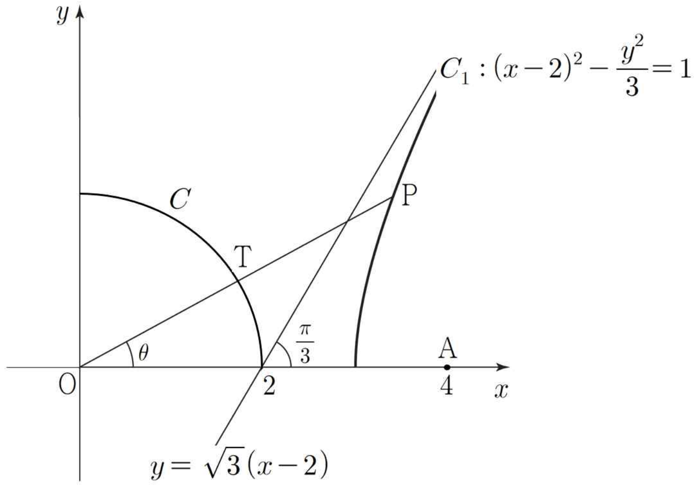
2. 예시 답안

[2-1]

$\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OT}}=2$(일정)이므로 점 P 가 나타내는 곡선 C_1 은 두 점 O, A 가 초점이고, 거리의 차가 2 인 쌍곡선의 일부분이다.

따라서 곡선 C_1 의 방정식은 $(x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1(x\ge 2,\ y\ge 0)$이다.

이때 점근선의 방정식은 $y=\sqrt{3}(x-2)$이고, 곡선 C_1 을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



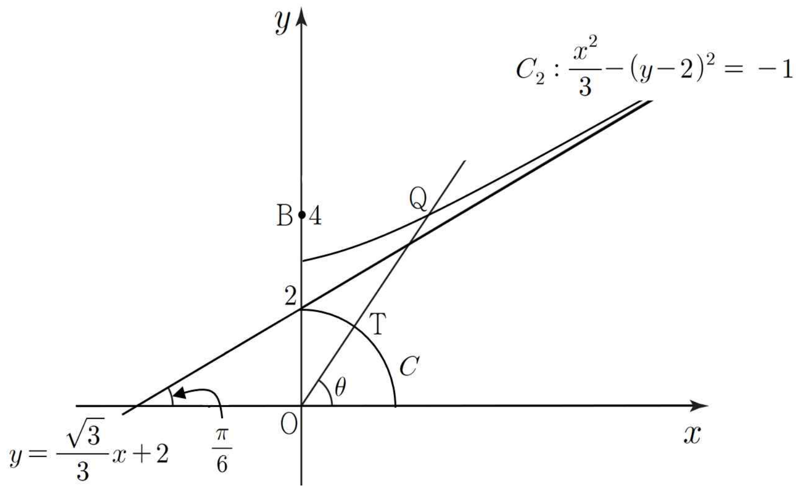
직선 OP 의 기울기는 $\sqrt{3}$ 보다 작고, $\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ 이므로 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 a 의 최댓값은 $\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

$\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{OT}}=2$(일정)이므로 점 Q 가 나타내는 곡선 C_2 는 두 점 O, B 가 초점이고, 거리의 차가 2 인 쌍곡선의 일부분이다.

따라서 곡선 C_2 의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}-(y-2)^2=-1(x\ge 0,\ y\ge 2)$이다.

이때 점근선의 방정식은 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$이고, 곡선 C_2 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



직선 OQ 의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 보다 크고, $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\dfrac{\pi}{6}<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 b의 최솟값은 $\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

[2-2]

두 곡선 C_1, C_2는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

두 곡선 C_1, C_2의 교점 R은 곡선 $C_1 : (x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$과 직선 $y=x$의 교점과 같다. 따라서

$$(x-2)^2-\frac{x^2}{3}=1\,,\ 2x^2-12x+9=0$$

$$x=3+\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

이므로 $\mathrm{R}\left(3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\,,\,3+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)$이다. 또한, $C_1 : (x-2)^2-\dfrac{y^2}{3}=1$를 x에 대하여 미분하면

$$2(x-2)-\frac{2}{3}y\times\frac{dy}{dx}=0$$

이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3(x-2)}{y}$ 이다. 따라서 곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}{3+\frac{3}{2}\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-1$$

이다.

한편 곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α_1,

곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α_2라 하면

$\alpha=|\alpha_1-\alpha_2|$와 같다.

곡선 C_1 위의 점 R에서의 접선과 곡선 C_2 위의 점 R에서의 접선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\alpha_1+\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$ 이다. 따라서

$$\tan\alpha_1=2\sqrt{2}-1 \text{ 이고, } \tan\alpha_2=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)=\cot\alpha_1=\frac{1}{2\sqrt{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}+1}{7}$$

이므로 $\tan\alpha=\tan|\alpha_1-\alpha_2|=\dfrac{2\sqrt{2}-1-\frac{2\sqrt{2}+1}{7}}{1+1}=\dfrac{6\sqrt{2}-4}{7}$ 이다.

- 문항 3-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	$V(t)=\frac{\pi}{3}(1-t^2)t=\frac{\pi}{3}(t-t^3)$ 또는 $V(\theta)=\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cos\theta$를 구할 수 있다.	4
	식을 미분하고 증감표를 작성하여 주어진 범위 내에 극댓값이 최댓값이 되는 이유를 설명할 수 있다. (증감표가 없더라도 주어진 범위 내에서 극대에서 최대가 됨을 설명하면 됨)	3
	원뿔의 부피의 최댓값 $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ 를 구할 수 있다.	3
[3-2]	$S_1(\theta)=\frac{\pi}{2}\sin^2\theta$ 를 구할 수 있다.	3
	$S_2(\theta)=\cos\theta\sin\theta+\pi-\theta$ 를 구할 수 있다.	3
	$S_1(\theta)+S_2(\theta)=\frac{\pi}{2}\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\pi-\theta$ 로 나타낼 수 있다.	1
	식을 미분하고 증감표를 작성하여 주어진 범위 내에 극댓값이 최댓값이 되는 이유를 설명할 수 있다. (증감표가 없더라도 주어진 범위 내에서 극대에서 최대가 됨을 설명하면 됨)	3
	넓이가 최대가 되는 θ 의 값을 임의의 문자 p 라 놓고 이때, $\tan p=\frac{\pi}{2}$, $\cos p=\frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}}$, $\sin p=\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 임을 구할 수 있다.	4
	$S=f(p)=\frac{3\pi}{2}-p$ 를 구할 수 있다.	3
	S일 때, $M=2p+\frac{2\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 을 구할 수 있다.	5
	$S+\frac{M}{2}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 을 구할 수 있다.	3

2.예시 답안

[3-1]

구의 중심 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 한다.

그리고 구와 평면 α가 만나서 생기는 단면의 경계 위의 한 점을 P라 하고, $\angle \mathrm{POH}=\theta$라고 두자.

원뿔의 부피를 $V(\theta)$라 두면

$$V(\theta)=\frac{\pi}{3}\sin^2\theta\cos\theta,$$

$$V'(\theta)=\frac{\pi}{3}(2\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta)$$

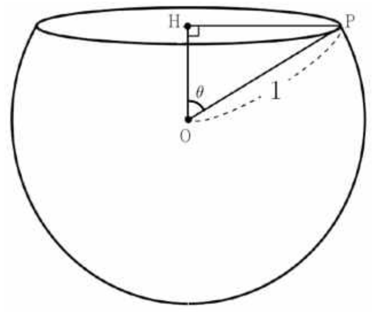
$$= \frac{\pi}{3}\sin\theta\,(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \frac{\pi}{3}\sin\theta\,(3\cos^2\theta - 1)$$

이다.

$V'(\theta)=0\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$을 만족하는 θ의 값을 k라고 두면 $\cos k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

θ	0	$\cdots$	k	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$V'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$V(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$	$\searrow$	



위의 증감표에서 $\theta = k$에서 원뿔의 부피는 최대가 되고, 그 때의 부피는 $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ 이다.

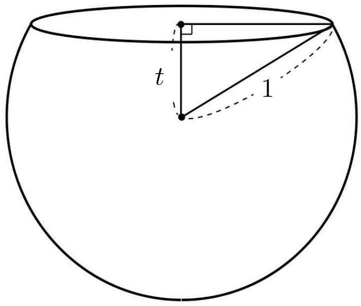
[3-1 별해]

도형 B의 절단면은 원이고, 구의 중심 O 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H,
그리고 $\overline{\mathrm{OH}}=t\,(0<t<1)$라 두고, 원뿔의 부피를 $V(t)$라 두면

$$V(t)=\frac{\pi}{3}(1-t^2)t=\frac{\pi}{3}(t-t^3),$$

$$V'(t)=\frac{\pi}{3}(1-3t^2)$$

이다.



t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$	$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$	$\searrow$	

위의 증감표에서 $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 원뿔의 부피는 최대가 되고,

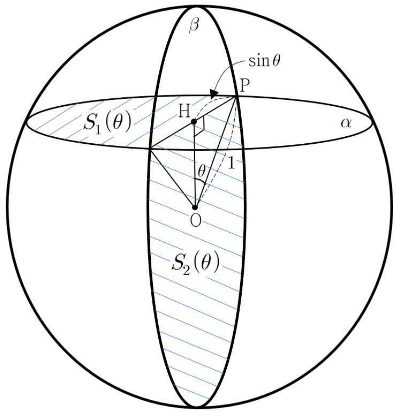
그 때의 부피는 $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ 이다.

[3-2]

구의 중심 O 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H 라 한다.
그리고 구와 두 평면 α, β와의 두 교점 중 하나를 P 라 하고 $\angle \mathrm{POH}=\theta$라고 두자.
따라서 두 절단면의 넓이를 각각 $S_1(\theta), S_2(\theta)$라고 하면 $S_1(\theta)$는 반지름이 $\sin\theta$인 반원의 넓이이고,
$S_2(\theta)$는 '반지름이 1, 중심각의 크기가 $2\pi-2\theta$인 부채꼴'과 '밑변이 $2\sin\theta$이고,
높이가 $\cos\theta$인 삼각형'의 넓이의 합으로 나타낼 수 있다. 따라서

$S_1(\theta) = \frac{\pi}{2}\sin^2\theta$

$S_2(\theta) = \cos\theta\sin\theta + \pi - \theta$



이다. $f(\theta) = S_1(\theta) + S_2(\theta)\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$라고 하면,

$$f(\theta) = \frac{\pi}{2}\sin^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \pi - \theta$$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \pi\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta - 1 \\ &= \pi\cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta \\ &= \sin\theta(\pi\cos\theta - 2\sin\theta) \end{aligned}$$

이다. $f'(\theta) = 0$을 만족하는 θ의 값을 p라고 두면 증감표는 다음과 같다.

θ	0	$\cdots$	p	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2} - p$	$\searrow$	

이것으로부터 $f(\theta)$는 $\theta = p$일 때 최대이고, 이 때, 절단면의 넓이의 최댓값 S은

$$S = f(p) = \frac{3\pi}{2} - p \quad \left(\because \tan p = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos p = \frac{2}{\sqrt{4+\pi^2}},\ \sin p = \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} \right)$$

이다.

이때, 도형 L의 호의 중심각이 $2 \times \angle \mathrm{POH}$이므로 호의 길이는 $2p$이고

도형 L의 밑변의 길이는 $2\sin p = \frac{2\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$이므로

$M = 2p + \frac{2\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 이다.

따라서 $S + \frac{M}{2} = \frac{3\pi}{2} - p + p + \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ 이다.