2020학년도 수시모집 논술고사 채점기준 및 예시답안(의학계)

- 문항 1-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f'(x)$를 구할 수 있다. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$	3
	부분적분을 할 수 있다. $\int(1\times\sqrt{x^2-4})dx = x\sqrt{x^2-4}-\int x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}dx$	5
	식의 변형을 통해 부정적분을 구할 수 있다. $I=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-4}-4\ln\left\|x+\sqrt{x^2-4}\right\|)+C$	7
[1-2]	접선의 방정식 $y=x$를 구할 수 있다.	3
	접선과 $y=2$의 교점을 구하고 넓이 S를 나타낼 수 있다. $S=\dfrac{9}{2}-\int_3^5\left\{\sqrt{\dfrac{3}{4}(x-1)^2-3}\right\}dx$	4
	정적분의 치환적분법을 이용할 수 있다. $\int_3^5\left\{\sqrt{\dfrac{3}{4}(x-1)^2-3}\right\}dx=\int_2^4\sqrt{\dfrac{3}{4}t^2-3}\,dt=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\int_2^4\sqrt{t^2-4}\,dt$	3
	[1-1]의 결과를 이용하여 $S=-\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$을 구할 수 있다.	5
[1-2] 별해	C를 x축으로 -1만큼, y축으로 -2만큼 평행이동시킨 곡선 C' : $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$을 구할 수 있다.	3
	$\mathrm{P}'(4,3)$에서의 접선의 방정식 $y=x-1$을 구할 수 있다.	3
	접선의 방정식의 x절편이 $(1,0)$이므로 구하는 영역의 넓이를 나타낼 수 있다. $S=\dfrac{9}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$	4
	[1-1]의 결과를 이용하여 $S=-\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$을 구할 수 있다.	5

2. 예시 답안

[1-1]

$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-4})$ $(x>2)$를 미분하면

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x+\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{(x+\sqrt{x^2-4})\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}I&=\int\sqrt{x^2-4}\,dx\\&=\int(1\times\sqrt{x^2-4})dx=x\sqrt{x^2-4}-\int x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}dx\\&=x\sqrt{x^2-4}-\int\frac{x^2-4+4}{\sqrt{x^2-4}}dx=x\sqrt{x^2-4}-I-\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx\end{aligned}$$

이다. $\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx$ 에서 $x=2\sec\theta$ 로 치환하면 $dx=2\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{4}{\sqrt{x^2-4}}dx&=\int\frac{4}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}}\times2\sec\theta\tan\theta\,d\theta\\&=4\int\sec\theta\,d\theta\\&=4\int\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}d\theta\\&=4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1\ (\text{단, } C_1 \text{ 은 적분 상수})\\&=4\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C_1\end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$I=x\sqrt{x^2-4}-I-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C'\ (\text{단, } C' \text{ 는 적분 상수})$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-4}-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|)+C\ (\text{단, } C\text{는 적분 상수})$$

이다.

[1-2]

곡선 $C: 3x^2-4y^2-6x+16y=25$ 위의 점 $(5,5)$에서의 접선의 방정식을 구하기 위해

$3x^2-4y^2-6x+16y=25$ 에서 y 를 x 의 함수로 보고, 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$6x-8y\cdot y'-6+16y'=0\ \ (y\neq2)$

이므로 점 $(5,5)$에서의 접선의 기울기는 위 식에 $x=5,\ y=5$ 를 대입하면

$30-40y'-6+16y'=0$

이므로 $y'=1$ 이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$l: y=x$

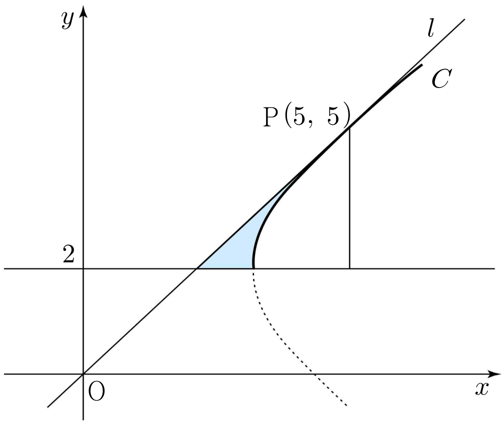
이다. 그러므로 접선과 직선 $y=2$ 의 교점의 좌표는 $(2,2)$이다.

$3x^2-4y^2-6x+16y=25$ 를 변형하면

$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

이므로 $y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} + 2$ 이다. 그러므로 그림의 색칠된 부분이 구하는 넓이와 같다.

따라서



$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \int_3^5 \left[\left\{\sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3} + 2\right\} - 2\right] dx$$

$$= \frac{9}{2} - \int_3^5 \left\{\sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3}\right\} dx$$

이다. 여기서 $\int_3^5 \left\{\sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3}\right\} dx$ 의 값을 구하기 위해

$x - 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 1$

$x = 3$ 일 때 $t = 2$, $x = 5$ 일 때 $t = 4$

$$\int_3^5 \left\{\sqrt{\frac{3}{4}(x-1)^2 - 3}\right\} dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{3}{4}t^2 - 3}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_2^4 \sqrt{t^2 - 4}\, dt$$

이다. [1-1]의 결과를 이용하면

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2 - 4}\, dt = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[t\sqrt{t^2-4} - 4\ln\left|t + \sqrt{t^2-4}\right|\right]_2^4$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{8\sqrt{3} - 4\ln(4 + 2\sqrt{3}) + 4\ln 2\}$$

$$= \sqrt{3}\{2\sqrt{3} - \ln(4 + 2\sqrt{3}) + \ln 2\}$$

$$= \sqrt{3}\{2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\}$$

이다. 따라서

$$S = \frac{9}{2} - \sqrt{3}\{2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\} = -\frac{3}{2} + \sqrt{3}\ln(2 + \sqrt{3})$$

이다.

(별해) $3x^2-4y^2-6x+16y=25$ 를 변형하면

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{3}=1$$

이다. 접선 l 과 직선 $y=2$ 및 곡선 C 로 둘러싸인 영역의 넓이는 곡선 C 를 x 축으로 -1 만큼, y 축으로 -2 만큼 평행이동시킨 곡선 C' : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 과 점 $(4,3)$에서의 접선 l' 및 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하면 된다.

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 에서 y 를 x 의 함수로 보고, 각 항을 x 에 대하여 미분하면

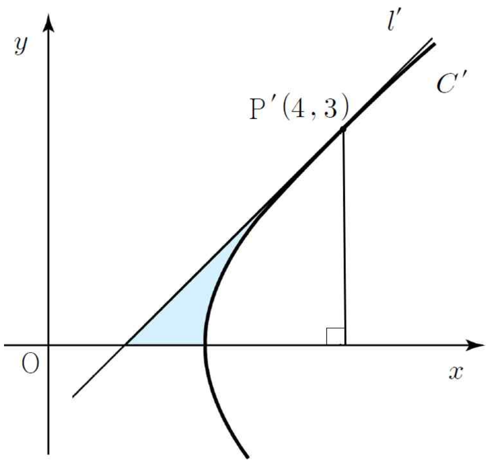
$$\frac{2x}{4}-\frac{2y}{3}\cdot y'=0\ (y\neq 0)$$

$(4,3)$에서의 접선의 기울기 $y'=1$ 이므로 접선의 방정식은

$y=x-1$

이다.

접선의 x 절편이 $(1,0)$이므로



구하는 영역의 넓이 $S=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$

이다. [1-1]의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_2^4\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2-4}\,dx &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[x\sqrt{x^2-4}-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|\right]_2^4\\ &=\frac{\sqrt{3}}{4}\{8\sqrt{3}-4\ln(4+2\sqrt{3})+4\ln 2\}\\ &=\sqrt{3}\{2\sqrt{3}-\ln(4+2\sqrt{3})+\ln 2\}\\ &=\sqrt{3}\{2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})\}\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$S=\frac{9}{2}-\sqrt{3}\{2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})\}=-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})$$

이다.

- 문항 2-

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	두 점 P, Q 가 모두 존재하는 각 $\angle \mathrm{AOT}$ 의 범위를 찾는 과정을 바르게 서술한다.	4
	$\overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{PA}}$ 를 만족하는 점 P 가 존재하는 도형(범위)를 바르게 구한다.	2
	$\overline{\mathrm{QT}} = \overline{\mathrm{QB}}$ 를 만족하는 점 Q 가 존재하는 도형(범위)를 바르게 구한다.	2
	$\overline{\mathrm{OP}} > a$ 를 만족하는 a 의 최댓값을 찾기 위한 점의 위치를 바르게 서술한다.	3
	a 의 최댓값을 바르게 구한다.	4
[2-2]	$f'(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 임을 바르게 구한다.	5
	$f(g(k)) = -g(k) + k$ 의 양변을 미분하여 b 의 최댓값을 바르게 구한다.	5
[2-3]	$h(k)$ 를 k 와 $g(k)$ 를 이용하여 바르게 나타낸다.	3
	$\lim\limits_{k \to \alpha+} \dfrac{h(k) - h(\alpha)}{k - \alpha}$ 의 범위를 바르게 구한다.	5
	$\lim\limits_{k \to \alpha-} \dfrac{h(k) - h(\alpha)}{k - \alpha}$ 의 범위를 바르게 구한다.	5
	$h(k)$ 가 $k = \alpha$ 에서 미분 가능하지 않음을 바르게 서술한다.	2

2. 예시 답안

[2-1]

점 T에 대하여 $\overline{\mathrm{PO}} - \overline{\mathrm{PA}} = (\overline{\mathrm{PT}} + \overline{\mathrm{OT}}) - \overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{OT}} = 2$(일정)

이므로 점 P 는 두 점 O, A 를 초점으로 하고 거리의 차가 2 인 쌍곡선 $(x-2)^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1\ (x > 2)$위의 점이다.

이 곡선의 점근선의 방정식이 $y = \pm\sqrt{3}(x-2)$ 이므로

반직선 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ 위의 점 P 에 대하여 직선 OP 의 기울기는 $-\sqrt{3}$ 보다 크고 $\sqrt{3}$ 보다 작아야 한다.

$\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 동경 OP 가 나타내는 각의 크기 θ_1에 대하여

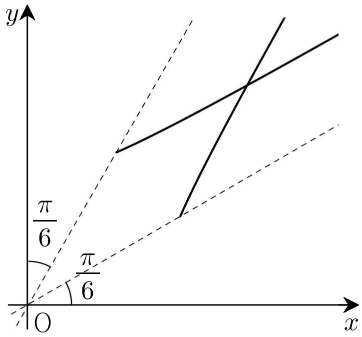
$-\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{3}$ 일 때 점 P 가 존재한다. … ㉠

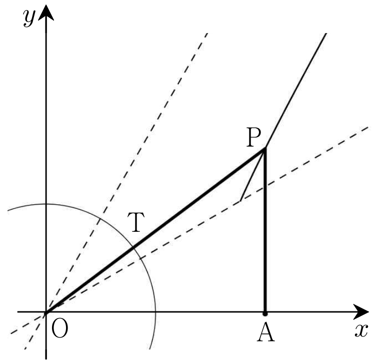
점 Q 는 점 P 를 직선 $y = x$에 대칭이동 시킨 곳에 생기므로

$\dfrac{\pi}{6} < \theta_2 < \dfrac{5}{6}\pi$ 일 때 점 Q 가 존재한다. … ㉡

그러므로 점 T 에 의해서 두 점 P, Q 가 동시에 존재하는 $\theta = \angle\mathrm{AOT}$ 의 범위는

㉠, ㉡에 의해서 $\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ 이다.





따라서 $C_1 = \left\{ (x\,,\,y) \mid (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1\,,\; y > \frac{\sqrt{3}}{3}x\,,\, x>2 \right\}$

$x>2$ 에서 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 와 $(x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 이 만나는 점을 P_1 이라 할 때,

$\overline{\mathrm{OP}} > a$ 인 a 의 최댓값은 $\overline{\mathrm{OP}_1}$ 와 같다. … (※)

$\overline{\mathrm{OP}_1} = t$ 에 대하여 쌍곡선의 정의에 의해서 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{A}} = t-2$ 이고

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{A}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_1}|^2$$

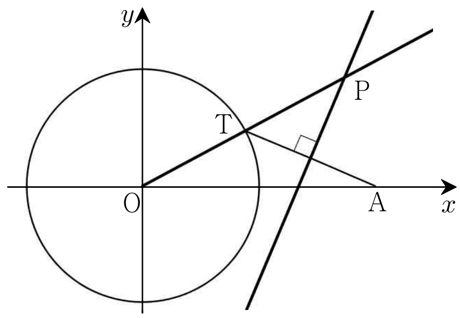
$$(t-2)^2 = 16 + t^2 - 2\times 4 \times t \times \cos\frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$$

따라서 a 의 최댓값은 $\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$ 이다.

㉠의 다른 풀이 ⅰ)

점 P 는 $\overline{\mathrm{TA}}$ 의 수직이등분선과 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ 의 교점이므로 점 P 가 존재하기 위해서는 $\overline{\mathrm{TA}}$ 의 수직이등분선과 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ 가 평행이 되지 않아야 한다.



즉, $\overline{\mathrm{TA}}$ 가 원 C의 접선일 때 점 P 가 존재하지 않으므로 동경 OP 가 나타내는 각의 크기 θ_1 에 대하여

$$\cos\theta_1 \neq \frac{1}{2} \text{ 인 } \theta_1 \neq \pm\frac{\pi}{3}$$

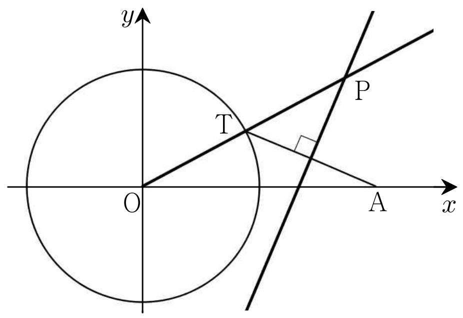
그러므로 $-\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ 일 때 점 P 가 존재한다.

($-\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ 가 아닌 θ_1에 대해서는 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ 가 아닌 위치에서 교점이 생긴다.)

㉠의 다른 풀이 ⅱ)

점 P 는 $\overline{\mathrm{TA}}$ 의 수직이등분선과 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ 의 교점이므로 점 P 가 존재하기 위해서는 $\overline{\mathrm{TA}}$ 의 수직이등분선과 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ 가 평

행이 되지 않아야 한다.



동경 OP가 나타내는 각의 크기 θ_1에 대하여

$\mathrm{T}(2\cos\theta_1, 2\sin\theta_1)$이고 직선 TA의 기울기는 $\dfrac{2\sin\theta_1}{2\cos\theta_1 - 4} = \dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - 2}$

이므로 직선 TA에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{\cos\theta_1 - 2}{\sin\theta_1}$ 이다. 또한, $\overline{\mathrm{OT}}$의 기울기는 $\dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{TA}}$의 수직이등분선과 $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$가 평행이면 $-\dfrac{\cos\theta_1 - 2}{\sin\theta_1} = \dfrac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}$

이고 $\cos\theta_1 = \dfrac{1}{2}$을 만족하는 값은 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{3}$이다.

그러므로 $-\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{3}$일 때 점 P가 존재한다.

(※)의 다른 풀이)

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$와 $(x-2)^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$를 연립하여 x의 값을 구하면 $x = \dfrac{9+3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

점 P_1의 x좌표가 $x = \dfrac{9+3\sqrt{3}}{4}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}_1} = \dfrac{9+3\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$

따라서 a의 최댓값은 $\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$이다.

[2-2]

곡선 $y = f(x)$는 쌍곡선의 일부분이고, 점근선의 기울기가 $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $f'(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ … ㉠

(또는, 함수 $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{3}+1\right)^{\frac{1}{2}} + 2$에 대하여 $f'(x) = \left(3 + \dfrac{9}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로 $f'(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.)

$f(g(k)) = -g(k) + k$로부터 $f'(g(k)) \times g'(k) = -g'(k) + 1$ 이고, 이를 정리하면

$$g'(k) \times \{f'(g(k)) + 1\} = 1$$

이므로 ㉠에 의해서 $g'(k) > \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ 이다.

그러므로 b의 최댓값은 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ 이다.

[2-3]

$h(k) = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} | f(g(k)) - g(k) | = \sqrt{2} | f(g(k)) - g(k) | = \sqrt{2} | k - 2g(k) |$와 같고

$$h'(k)=\begin{cases}\sqrt{2}\,(1-2g'(k)) & (k<\alpha)\\ \sqrt{2}\,(2g'(k)-1) & (k>\alpha)\end{cases}$$ … ㉠

$$h''(k)=\begin{cases}-2\sqrt{2}\,g''(k) & (k<\alpha)\\ 2\sqrt{2}\,g''(k) & (k>\alpha)\end{cases}$$ … ㉡

이다. 그리고 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하므로 $f''(x)>0$이다.

(또는, 함수 $f(x)=\left(\frac{x^2}{3}+1\right)^{\frac{1}{2}}+2$에 대하여 이계도함수를 직접 구해도 $f''(x)>0$임을 알 수 있다.)

한편 [2-2]의 결과로부터

$g'(k)\times\{f'(g(k))+1\}=1$이고 $g'(k)>\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{2}$ … ㉢

이므로 위 식을 양변 미분하면

$$g''(k)\times\{f'(g(k))+1\}+\{g'(k)\}^2\times f''(g(k))=0$$

이다.

$f'(g(k))+1>0$, $\{g'(k)\}^2\times f''(g(k))>0$이므로 $g''(k)<0$이다. … ㉣

만일 함수 $h(k)$가 $k=\alpha$에서 미분가능하다고 가정하면, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣로부터

1) $k>\alpha$일 때 $h'(k)>0$이고, $h''(k)<0$이므로 $\lim_{k\to\alpha+}\dfrac{h(k)-h(\alpha)}{k-\alpha}>0$

2) $k<\alpha$일 때 $h'(k)<0$이고, $h''(k)>0$이므로 $\lim_{k\to\alpha-}\dfrac{h(k)-h(\alpha)}{k-\alpha}\le 0$

이다. 따라서 $\lim_{k\to\alpha-}\dfrac{h(k)-h(\alpha)}{k-\alpha}\neq\lim_{k\to\alpha+}\dfrac{h(k)-h(\alpha)}{k-\alpha}$이므로 함수 $h(k)$는 $k=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

- 문항 3 -

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	4 이하의 숫자가 적힌 카드를 뽑을 수 있는 경우를 나눌 수 있다.	3
	식을 세울 수 있다.	4
	확률의 값을 구할 수 있다.	3
[3-1] 별해	4 이하의 숫자가 적힌 카드를 뽑을 수 있는 경우를 나눌 수 있다.	2
	8 장의 카드를 뽑는 과정에서 4 이하의 카드를 뽑는 경우를 구할 수 있다.	3
	6 번째에 4 이하의 카드를 모두 뽑는 위치를 선택할 경우를 구할 수 있다.	3
	확률의 값을 구할 수 있다.	2
[3-2]	$(k-1)$ 번째까지 시행에서 l 이하의 자연수 중 $(l-1)$ 개를 뽑는 경우를 나눌 수 있다.	2
	$\mathrm{P}(X=k)$ 의 확률을 k 와 l 에 관한 식으로 나타낼 수 있다.	3
	확률을 구할 수 있다.	4
	평균 $\mathrm{E}(X)$ 의 식을 나타낼 수 있다.	3
	제시문 (나)를 이용하여 식을 변형할 수 있다.	6
	값을 구할 수 있다.	2
[3-2] 별해	l 이하의 숫자가 적힌 카드를 뽑을 수 있는 경우를 나눌 수 있다.	2
	$2l$ 장의 카드를 뽑는 과정에서 l 이하의 카드를 뽑는 경우를 구할 수 있다.	3
	k 번째에서 l 이하의 카드를 모두 뽑는 위치를 선택할 경우를 구할 수 있다.	3
	확률의 값을 구할 수 있다.	1
	평균 $\mathrm{E}(X)$ 의 식을 나타낼 수 있다.	3
	제시문 (나)를 이용하여 식을 변형할 수 있다.	6
	값을 구할 수 있다.	2

2.예시 답안

[3-1]

5 번째까지 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 가 적힌 카드 중 세 장과 숫자 $5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이 적힌 카드 중 두 장을 꺼내어 배열하고, 6 번째에 숫자 $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 가 적힌 카드 중 남은 숫자가 적힌 카드를 꺼내면

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_2\times 5!}{{}_8\mathrm{P}_5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$$

이다.

다른 풀이) $\mathrm{P}(X=6)$의 의미는 1 부터 8 까지의 자연수 중에서 하나씩 뽑아갈 때 4 이하의 자연수를 6 번째에 모두 뽑게 되는 확률이다. 즉,

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{(6\text{번째에 }4\text{이하의 카드를 모두 뽑게 되는 위치를 선택하는 경우의 수})}{(8\text{장의 카드를 뽑는 과정에서 }1,\ 2,\ 3,\ 4\text{의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수})}$$

와 같다.

① 8 장의 카드를 뽑는 과정에서 1 , 2 , 3 , 4 의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}_8\mathrm{C}_4$

② 6 번째에 4 이하의 카드를 모두 뽑도록 1 , 2 , 3 , 4 의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}_5\mathrm{C}_3$

이므로 $\mathrm{P}(X=6)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{7}$ 이다.

[3-2]

$1\le N\le l$ 인 자연수 N에 대하여 $(k-1)(k=l,\ l+1,\ \cdots,\ 2l)$번째까지 N을 제외한 l 이하의 자연수가 적힌 카드를 꺼내고, k 번째에서 N이 적힌 카드를 꺼낸다고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{{}_l\mathrm{C}_{l-1}\times{}_l\mathrm{C}_{k-l}\times(k-1)!}{{}_{2l}\mathrm{P}_{k-1}}\times\frac{1}{2l-k+1}\\&=\frac{l\times\dfrac{l!}{(k-l)!\cdot(2l-k)!}\times(k-1)!}{\dfrac{(2l)!}{(2l-k+1)!}}\times\frac{1}{2l-k+1}\\&=\frac{l\times(2l-l)!\times(k-1)!}{(2l)!\times(k-l)!}=\frac{l!\times(2l-l)!}{(2l)!}\times\frac{(k-1)!}{(k-l)!\cdot(l-1)!}\\&=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{l-1}}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\end{aligned}$$

다른 풀이) $\mathrm{P}(X=k)$의 의미는 1 부터 $2l$ 까지의 자연수 중에서 하나씩 뽑아갈 때 l 이하의 자연수를 k 번째에 모두 뽑게 되는 확률이다. 즉,

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{(k\text{번째에 }l\text{이하의 카드를 모두 뽑게 되는 위치를 선택하는 경우의 수})}{(2l\text{장의 카드를 뽑는 과정에서 }l\text{이하의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수})}$$

와 같다.

① $2l$ 장의 카드를 뽑는 과정에서 l 이하의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}_{2l}\mathrm{C}_l$

② k 번째에 l 이하의 카드를 모두 뽑도록 l 이하의 카드를 뽑을 위치를 선택하는 경우의 수 : ${}_{k-1}\mathrm{C}_{l-1}$

이므로 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{l-1}}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}$ 이다.

이다. 따라서 제시문 (나), (다)에 의해 구하는 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은

$$\begin{aligned}\sum_{k=l}^{2l}\left\{k\times\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{l-1}}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\right\}&=\frac{1}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\sum_{k=l}^{2l}\left\{k\times\frac{(k-1)!}{(l-1)!\cdot(k-l)!}\right\}\\&=\frac{l}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\sum_{k=l}^{2l}\frac{k!}{l!\cdot(k-l)!}\\&=\frac{l}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\sum_{k=l}^{2l}{}_k\mathrm{C}_l=\frac{l}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\left({}_l\mathrm{C}_l+{}_{l+1}\mathrm{C}_l+\cdots+{}_{2l}\mathrm{C}_l\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{l}{{}_{2l}\mathrm{C}_l}\left({}_{l+1}\mathrm{C}_{l+1} + {}_{l+1}\mathrm{C}_l + \cdots + {}_{2l}\mathrm{C}_l\right)$$

$$= \frac{l}{{}_{2l}\mathrm{C}_l} \times {}_{2l+1}\mathrm{C}_{l+1} = \frac{l(2l+1)}{l+1}$$

이다.