자연계열 [문제 2] 해설 및 모범답안

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

> 1. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ (단, $a<x<b$)
>
> 2. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
>
> 3. 함수 $f(x)$가 세 실수 $a,\ b,\ c$를 포함하는 닫힌 구간에서 연속일 때,
> $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
>
> 4. 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는
> $$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[1] 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x) = \int_{x-2}^{x}(t+2|t-2|)\,dt$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $x \le 2$ 일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(\sin x)}{x}$ 를 구하시오. [6점]

(2) 도함수 $\frac{d}{dx}f(x)$를 구하시오. [9점]

(3) $2 \le x \le 4$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점을 P라고 하자. 두 정점 $A(3,0)$, $B(4,2)$와 점 P가 이루는 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값과 그때 점 P의 좌표를 구하시오. [12점]

(4) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge \frac{11}{2}$임을 보이시오. [10점]

[2] 계수가 실수인 삼차함수 $g(x)$는 다음 조건들을 모두 만족시킨다.

> (i) $g(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (ii) $g(x)$는 도함수 $g'(x)$로 나누어 떨어진다.
> (iii) $g(0)=27$

(1) 함수 $g(x)$를 구하시오. [8점]

(2) 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=g'(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [5점]

■ 출제 의도

[1] (1) 주어진 구간에서 함수의 구성 능력 및 함수의 극한값의 계산능력을 평가한다.
(2) 적분과 미분의 관계에 대한 이해력 및 도함수 유도능력을 평가한다.
(3) 기하학적 요구 조건을 만족시키는 수식의 도출 능력 및 계산능력을 평가한다.
(4) 구간에 따라 나누어진 함수의 전체 모습의 이해능력과 최솟값의 계산능력을 평가한다.

[2] (1) 주어진 조건의 이해 능력 및 활용 능력을 평가한다.
(2) 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이에 대한 정적분의 구성 능력과 계산능력을 평가한다.

■ 문항 해설

미적분학은 모든 공학과 자연과학의 기초를 이루는 이론으로서 그 뛰어난 유용성으로 많은 분야에 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념 체계들 중 하나이다. 다항식은 가장 기본적인 함수의 형태이며 많은 응용성으로 인해 반드시 이해되어야할 수학적 대상이다. 문항들은 이러한 개념들을 이해하고 제시문을 활용한다면 다음과 같은 간단한 과정을 통해 해결할 수 있다.

[1] (1) 정적분으로 나타낸 함수를 구간을 이용하여 표현하고 극한을 계산함으로써 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 적분과 미분과의 관계를 활용하여 함수의 도함수 결정을 해결할 수 있는 문항이다.
(3) 구간을 이용하여 함수를 구성하고 기하학적 요구를 수식으로 표현함으로써 해결할 수 있는 문항이다.
(4) 구간에 의해 나누어진 함수의 전체 모습을 구성하면 해결할 수 있는 문항이다.

[2] (1) 삼차함수에 조건들을 적용함으로써 해결할 수 있는 문항이다.
(2) 삼차함수와 이차함수의 그래프 위치 관계와 정적분을 활용하여 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	$x \le 2$일 때, $f(x)=-2x+10$을 구했으면	4
	극한값 -2를 구했으면	2
1-2	$f(x)=\int_a^x (t+2\|t-2\|)\,dt+\int_{x-2}^a (t+2\|t-2\|)\,dt$를 표현했으면	2
	$f(x)=\int_a^x (t+2\|t-2\|)\,dt-\int_a^{x-2} (t+2\|t-2\|)\,dt$를 표현했으면	2
	$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x (t+2\|t-2\|)\,dt-\frac{d}{dx}\int_a^{x-2} (t+2\|t-2\|)\,dt$를 표현했으면	2
	$2+2\|x-2\|-2\|x-4\|$를 구했으면	3
1-3	$2 \le x \le 4$일 때, $f(x)=2x^2-10x+18$을 구했으면	4
	곡선 위의 점 중에서 직선 AB와 최단거리에 있는 점 $(3,6)$을 구했으면	4
	$(3,6)$과 직선 AB 사이의 거리를 구했으면	2
	삼각형 PAB의 넓이의 최솟값을 구했으면	2
1-4	$4 \le x$일 때, $f(x)=6x-14$를 구했으면	4
	$f(x)$가 $2 \le x \le 4$에서 최솟값을 가지는 이유를 설명했으면	3
	$f(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 최솟값이 $\frac{11}{2}$임을 보이면	3
2-1	조건 (ⅰ)과 (ⅱ)를 이용하여 $g(x)=\left(\frac{1}{3}x+t\right)(3x^2+2ax+b)$를 구했으면	2
	계수를 비교하여 $9t=a$, $3at=b$, $bt=c$를 구했으면	2
	$g(x)=(x+3t)^3$을 구했으면	2
	조건 (ⅲ)을 이용하여 $g(x)=(x+3)^3$을 구했으면	2
2-2	$-3 \le x \le 0$에서 $g'(x) \ge g(x)$를 설명했으면	2
	$\int_{-3}^0 \{3(x+3)^2-(x+3)^3\}\,dx$를 표현했으면	1
	$\frac{27}{4}$을 구했으면	2

■ 예시 답안

[1] (1) $x \le 2$이므로 $f(x)=\int_{x-2}^x (-t+4)\,dt=\left[-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_{x-2}^x=-2x+10$이다.

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)-f(\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-4x+10+2\sin x-10}{x}=\lim_{x\to0}\left(-4+2\frac{\sin x}{x}\right)=-2$이다.

(2) 제시문 1과 3을 이용하면 임의의 실수 a에 대해서

$f(x)=\int_a^x (t+2|t-2|)\,dt+\int_{x-2}^a (t+2|t-2|)\,dt=\int_a^x (t+2|t-2|)\,dt-\int_a^{x-2} (t+2|t-2|)\,dt$이므로

$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x (t+2|t-2|)\,dt-\frac{d}{dx}\int_a^{x-2} (t+2|t-2|)\,dt=x+2|x-2|-(x-2)-2|(x-2)-2|$

$=2+2|x-2|-2|x-4|$이다.

(3) $2 \le x \le 4$이면 $x-2 \le 2 \le x$가 성립하므로 $f(x)=\int_{x-2}^x (t+2|t-2|)\,dt=\int_{x-2}^2 (-t+4)\,dt+\int_2^x (3t-4)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{2}t^2+4t\right]_{x-2}^2+\left[\frac{3}{2}t^2-4t\right]_2^x=2x^2-10x+18$이다.

삼각형 PAB에서 선분 AB를 밑변으로 정하자. 그리고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P 중에서 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기인 2와 같게 되는 점을 P_0라고 하자. $f'(x)=4x-10=2$이므로 점 P_0의 좌표는 $(3,6)$이다. 점 P_0는 곡선 위의 점 P 중에서 직선 AB와 최단거리에 있는 점이므로 삼각형 P_0AB는 삼각형 PAB의 넓이를 최소로 하는 삼각형이다. 제시문 4를 이용하여 점 P_0와 직선 AB 사이의 거리 d를 구하면, 직선 AB의 방정식은 $y=2x-6$이므로 $d=\frac{|2\times3-6-6|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$이다. 그리고 선분 AB의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값인 삼각형 P_0AB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{6}{\sqrt{5}}=3$이다.

(4) (a) $x \le 2$일 때, (1)에서와 같이 $f(x)=-2x+10$이다.

(b) $2 \le x-2$ 즉, $4 \le x$일 때, $f(x)=\int_{x-2}^x (3t-4)\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2-4t\right]_{x-2}^x=6x-14$이다.

(c) $x-2 \le 2 \le x$ 즉, $2 \le x \le 4$일 때, (3)에서와 같이 $f(x)=2x^2-10x+18=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$이다.

실수 전체에서 연속인 함수 $f(x)$는 $x \le 2$에서 감소이고, $2 \le x \le 4$에서 $f(x) \ge \frac{11}{2}$이며, $4 \le x$에서는 증가이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge \frac{11}{2}$이다.

[2] (1) 조건 (ⅰ)을 이용하여 $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

$g'(x)=3x^2+2ax+b$와 조건 (ⅱ)를 이용하면 $g(x)=\left(\frac{1}{3}x+t\right)(3x^2+2ax+b)$를 얻는다.

$g(x)$를 전개하여 계수를 비교하면 $9t=a$, $3at=b$, $bt=c$이다.

따라서 $g(x)=x^3+9tx^2+27t^2x+27t^3=(x+3t)^3$이다.

조건 (ⅲ)을 이용하면 $t=1$이므로 $g(x)=(x+3)^3$이다.

(2) 두 곡선 $y=g(x)=(x+3)^3$과 $y=g'(x)=3(x+3)^2$의 교점의 x좌표는 -3과 0이다.

$-3 \le x \le 0$에서 $g'(x) \ge g(x)$이므로 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=g'(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-3}^{0} \{3(x+3)^2 - (x+3)^3\}\,dx = \left[(x+3)^3 - \frac{(x+3)^4}{4}\right]_{-3}^{0} = \frac{27}{4}$ 이다.