자연계열 [문제 1] 해설 및 모범답안

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

1. 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라고 한다.

2. 명제 $p \to q$에 대하여 $\sim q \to \sim p$를 대우라고 한다.

3. 함수 $f: X \to Y$가 일대일함수이고 치역과 공역이 같을 때 이 함수 f를 일대일 대응이라고 한다.

4. 함수 $f: X \to Y$가 일대일 대응일 때 $f^{-1}: Y \to X$는 f의 역함수이다.

5. 두 함수 $f: X \to Z,\ g: Z \to Y$의 합성함수는 $g \circ f: X \to Y,\ \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$이다.

[1] 부등식 $kx - |k|x - k^2 - k + 56 \geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립할 때 k의 최솟값과 최댓값을 구하시오. [13점]

[2] 실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 부분집합 A와 집합 $B = \{\, t \mid 0 < t < t^2$, 단, t는 실수 $\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.
(1) A가 조건 "$a \in A$이면 $a + 10 \in A$이다"를 만족시킬 때 A는 무한집합임을 증명하시오. [6점]
(2) (1)을 이용하여 B가 유한집합인지 무한집합인지 판정하고 이유를 설명하시오. [9점]

[3] 실수 전체의 집합의 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 함수 $f: X \to X$가 일대일 대응일 때 다음 물음에 답하시오.
(1) 함수 f의 역함수 $f^{-1}: X \to X$는 일대일함수임을 증명하시오. [7점]
(2) 함수 $g: X \to X,\ g(x) = x^3$과 함수 $h: X \to X$에 대하여 $f \circ g = f \circ h$일 때 $h(5)$를 구하시오. [5점]
(3) 함수 f에 대한 다음 명제의 참 또는 거짓을 판정하고 대우를 이용하여 증명하시오. [10점]

$(f \circ f)(a) \neq a$인 $a \in X$가 존재하면 $(f^{-1} \circ f^{-1})(c) \neq c$인 $c \in X$가 존재한다.

■ 출제 의도

[1] 일차부등식을 이해하고 해의 존재성을 판단하는 능력과 최솟값과 최댓값을 구하는 계산력을 평가한다.

[2] (1) 집합의 원소의 개수에 대한 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는 능력과 이를 증명할 수 있는 논리력을 평가한다.

(2) 주어진 집합의 원소를 구체적으로 구하는 계산력과 이 집합이 무한집합임을 증명하기 위해서 주어진 명제를 활용할 수 있는 응용력 및 논리력을 평가한다.

[3] (1) 역함수가 일대일함수가 됨을 증명할 수 있는 논리력을 평가한다.

(2) 합성함수의 이해력 및 계산능력을 평가한다.

(3) 주어진 명제의 대우를 구체적으로 구하는 이해력 및 대우명제가 참임으로 증명하는 논리력을 평가한다.

■ 문항 해설

일차부등식, 집합, 명제 및 일대일대응, 역합수 및 합성함수 등의 개념은 인문학과 자연과학을 포함한 모든 분야에서 유용하게 활용되고 있는 가장 기본적인 수학적 개념이다. 이러한 개념들을 이해하고 기본적인 논리력을 활용하여 다음과 같은 기본적인 과정을 통해 해결할 수 있는 간단한 문항이라고 할 수 있다.

[1] 주어진 부등식의 해를 구하는 과정을 이해함으로써 답을 유도할 수 있는 문항이다.

[2] (1) 주어진 명제의 가정과 결론을 이해하면 간단히 해결할 수 있는 문항이다.

(2) 집합에 속하는 원소를 구체적으로 구하고 주어진 명제에 응용함로써 해결할 수 있도록 구성된 문항이다.

[3] (1) 역함수의 개념과 일대일 함수를 이해함으로써 간단히 해결할 수 있는 문항이다.

(2) 합성함수의 개념과 일대일대응의 개념에 대한 이해를 기반으로 해결할 수 있는 문항이다.

(3) 주어진 명제의 대우를 구할 수 있으면 함수와 역함수의 이해를 통해 해결할 수 있는 문항이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$k \geq 0$임을 구했으면	4
	$k-\lvert k\rvert=0$을 구했으면	2
	$-8 \leq k \leq 7$를 구했으면	3
	k의 최솟값 0, k의 최댓값 7을 구했으면(각각 2점씩)	4
2-1	A를 유한집합이라 가정하고 A에 속하는 원소 중에 가장 큰 원소가 존재함을 설명하였으면	2
	A에 속하는 원소 중에 가장 큰 원소를 a라 놓고 $a+10 \in A$을 설명하였으면	2
	$a<a+10$이므로 a가 A에 속하는 원소 중에 가장 큰 원소라는 것에 모순임을 보였으면	2
2-2	B가 무한집합임을 언급하였으면	3
	$t \in B$이면 $t>1$임을 보였으면 (또는, $B=\{\ t \mid t>1,$ 단, t는 실수 $\}$임을 보였으면)	3
	$t>1$이면 $t+10>1$이므로 $t+10 \in B$임을 설명하였으면	3
3-1	$f^{-1}(a)=f^{-1}(b)$라고 가정하였으면	3
	$f(f^{-1}(a))=f(f^{-1}(b))$를 구했으면	2
	$f \circ f^{-1}$는 항등함수이므로 $a=b$임을 설명하였으면	2
3-2	$g(x)=h(x)$를 구했으면	3
	$h(5)=125$를 구했으면	2
3-3	주어진 명제가 참임을 언급하였으면	2
	모든 $c \in X$에 대하여 $(f^{-1} \circ f^{-1})(c)=c$가 성립한다고 가정하였으면	3
	$f^{-1}(c)=f(c)$임을 보였으면	2
	모든 $c \in X$에 대하여 $(f \circ f)(c)=c$임을 보이고 대우가 참임을 설명하였으면	3

■ 예시 답안

[1] 부등식을 정리하면 $(k-|k|)x \geq k^2+k-56$이다. 그런데 $k<0$이면 $k-|k|=2k<0$이고 $x \leq \dfrac{k^2+k-56}{2k}$ 이므로 부등식은 모든 실수 x에 대해서 성립하지 않는다. 그러므로 $k \geq 0$이고 $k-|k|=0$이다.
따라서 $k^2+k-56 \leq 0$이므로 $-8 \leq k \leq 7$이다. 즉, $k \geq 0$이고 $-8 \leq k \leq 7$이므로 $0 \leq k \leq 7$이다.
그러므로 k의 최솟값은 0이고 k의 최댓값은 7이다.

[2] (1) A가 유한집합이라 가정하면 A에 속하는 원소 중에 가장 큰 원소가 존재한다. 이를 a라 놓으면 주어진 조건에 따라서 $a+10 \in A$ 이다. 그런데 $a<a+10$이므로 a가 A에 속하는 원소 중에 가장 큰 원소라는 것에 모순이 된다. 따라서 A는 무한집합이다.

(2) $t \in B$이면 $t(t-1)>0$이고 $t>0$이다. 따라서 $t \in B$이면 $t>1$이므로 $B=\{\, t \mid t>1$, 단, t는 실수 $\}$이다. 그런데 $t>1$이면 $t+10>1$이므로 조건 "$t \in B$이면 $t+10 \in B$이다"를 만족시킨다. 그러므로 (1)에 의해서 B는 무한집합이다.

[3] (1) $f^{-1}(a)=f^{-1}(b)$라고 가정하면 $f(f^{-1}(a))=f(f^{-1}(b))$이고 $f \circ f^{-1}$는 항등함수이므로 $a=b$이다.
따라서 f^{-1}는 일대일함수이다.

(2) $f \circ g = f \circ h$이므로 $f(g(x))=f(h(x))$이다. 그런데 f는 일대일함수이므로 $g(x)=h(x)$이다.
그런데 $g(x)=x^3$이므로 $h(x)=x^3$이고 $h(5)=125$이다.

(3) 모든 $c \in X$에 대하여 $(f^{-1} \circ f^{-1})(c)=c$가 성립한다고 가정하자. 그러면 $f((f^{-1} \circ f^{-1})(c))=f(c)$이다.
그런데 $f((f^{-1} \circ f^{-1})(c))=(f \circ f^{-1})(f^{-1}(c))=f^{-1}(c)$이므로 $f^{-1}(c)=f(c)$이다.
따라서 $c=f(f^{-1}(c))=f(f(c))$이므로 모든 $c \in X$에 대하여 $(f \circ f)(c)=c$이다.
즉, 주어진 명제의 대우는 참이므로 주어진 명제는 참이다.