2024 학년도 논술(AAT) 모의고사 예시답안 및 채점기준(자연계열Ⅱ)

[문제 1]

1. 예시 답안

【1-1】 조건 (Ⅰ)에 $a=b=0$을 대입하면, $2f(0)\{2+(f(0))^2\}=0$ 이므로 $f(0)=0$ 이다.
조건 (Ⅰ)에 $b=0$을 대입하고 $f(0)=0$ 을 이용하면, 임의의 실수 a에 대하여 $f(2a)=f(a)\sqrt{4+\{f(a)\}^2}$ 가 성립함을 알 수 있다.

따라서, $f(\ln 4)=f(2\ln 2)=f(\ln 2)\sqrt{4+\{f(\ln 2)\}^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{4+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{15}{4}$ 이다.

【1-2】 조건 (Ⅰ)에서 $a=h$라 두면 $2f(b+2h)-2f(b)=f(h)\sqrt{4+\{f(h)\}^2}\sqrt{4+\{f(b)\}^2}+\{f(h)\}^2f(b)$ 이고,
따라서 $\dfrac{f(b+2h)-f(b)}{2h}=\dfrac{f(h)\sqrt{4+\{f(h)\}^2}}{4h}\sqrt{4+\{f(b)\}^2}+\dfrac{\{f(h)\}^2f(b)}{4h}$ 이다.

한편, $\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(0)=0$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=f'(0)=2$임을 이용하면,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(b+2h)-f(b)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\frac{\sqrt{4+\{f(h)\}^2}}{4}\sqrt{4+\{f(b)\}^2}+\frac{f(b)}{4}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}f(h)=\sqrt{4+\{f(b)\}^2}$$

이므로, 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 미분가능하다. 따라서, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

또한, $f'(\ln 2)=\sqrt{4+\{f(\ln 2)\}^2}=\sqrt{4+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{5}{2}$ 이다.

【1-3】 임의의 실수 x에 대하여 문제 【1-2】풀이에 의해 $f'(x)=\sqrt{4+\{f(x)\}^2}$ 임을 알 수 있다.
따라서 $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\{f'(x)\}^2dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{4+\{f(x)\}^2}\,f'(x)\,dx$ 이다.

부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{4+\{f(x)\}^2}\,f'(x)\,dx &= \Big[\sqrt{4+\{f(x)\}^2}\,f(x)\Big]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\frac{\{f(x)\}^2}{\sqrt{4+\{f(x)\}^2}}f'(x)\,dx \\ &= \frac{15}{4}-\int_0^{\ln 2}\sqrt{4+\{f(x)\}^2}\,f'(x)\,dx+\int_0^{\ln 2}\frac{4}{\sqrt{4+\{f(x)\}^2}}f'(x)\,dx\end{aligned}$$

이므로,

$$\int_0^{\ln 2}\{f'(x)\}^2dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{4+\{f(x)\}^2}\,f'(x)\,dx=\frac{15}{8}+2\int_0^{\ln 2}\frac{f'(x)}{\sqrt{4+\{f(x)\}^2}}\,dx=\frac{15}{8}+2\int_0^{\ln 2}1\,dx=\frac{15}{8}+2\ln 2$$

이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$2f(0)\{2+(f(0))^2\}=0$을 유도하면	5
	$f(0)=0$을 구하면	10
	$f(\ln 4)=f(\ln 2)\sqrt{4+\{f(\ln 2)\}^2}$을 구하면	5
	$f(\ln 4)=\dfrac{15}{4}$을 구하면	10
1-2	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(b+2h)-f(b)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}\dfrac{\sqrt{4+\{f(h)\}^2}}{4}\sqrt{4+\{f(b)\}^2}+\dfrac{f(b)}{4}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}f(h)$ 를 유도하면	10
	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(b+2h)-f(b)}{2h}=\sqrt{4+\{f(b)\}^2}$을 구하면	10
	함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이면	10
	$f'(\ln 2)=\sqrt{4+\{f(\ln 2)\}^2}$을 구하면	10
	$f'(\ln 2)=\dfrac{5}{2}$를 구하면	10
1-3	$\int_0^{\ln 2}\{f'(x)\}^2dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{4+\{f(x)\}^2}\,f'(x)dx$를 유도하면	10
	$\int_0^{\ln 2}\{f'(x)\}^2dx=\dfrac{15}{8}+2\int_0^{\ln 2}\dfrac{f'(x)}{\sqrt{4+\{f(x)\}^2}}dx$를 유도하면	10
	$\int_0^{\ln 2}\{f'(x)\}^2dx=\dfrac{15}{8}+2\ln 2$를 구하면	20

[문제 2]

1. 예시 답안

【2-1】 $(\text{호 DD}'\text{의 길이})=\overline{\text{PD}}\,r=2$이므로 $\overline{\text{PD}}=\dfrac{2}{r}=\overline{\text{DF}}\cot p=2\cot p$. 따라서 $r=\tan p$

【2-2】 $\angle\text{BPA}$를 w라 하면 $\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PB}}\cos w$이다. 점 P를 좌표평면의 원점이라 하고 반직선 PA를 양의 x축이라 하면

$$\text{A}=(\overline{\text{PB}}\cos w,0) \qquad \text{B}=(\overline{\text{PB}}\cos w,\overline{\text{PB}}\sin w) \qquad \text{D}=(\overline{\text{PD}},0)$$
$$\text{A}'=(\overline{\text{PB}}\cos w\cos r,\overline{\text{PB}}\cos w\sin r) \qquad \text{B}'=(\overline{\text{PB}}\cos(r+w),\overline{\text{PB}}\sin(r+w)) \qquad \text{D}'=(\overline{\text{PD}}\cos r,\overline{\text{PD}}\sin r)$$

부채꼴 $\mathrm{PBB'}$의 호와 x축, 두 직선 $x=\overline{\mathrm{PA}}$, $x=\overline{\mathrm{PB}}\cos(r+w)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 부채꼴 $\mathrm{PDD'}$의 호와 x축, 직선 $x=\overline{\mathrm{PD}}\cos r$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 선분 $\mathrm{D'A'}$와 x축, 두 직선 $x=\overline{\mathrm{PD}}\cos r$, $x=\overline{\mathrm{PA}}\cos r$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3, 그리고 선분 $\mathrm{B'A'}$와 x축, 두 직선 $x=\overline{\mathrm{PB}}\cos(r+w)$, $x=\overline{\mathrm{PA}}\cos r$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_4라 하자.

부채꼴 $\mathrm{PBB'}$의 호, 부채꼴 $\mathrm{PDD'}$의 호는 각각 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{PD}}$인 원의 일부이므로 (가)에 의해

$$S_1=\int_{\overline{\mathrm{PB}}\cos(r+w)}^{\overline{\mathrm{PB}}\cos w}\sqrt{\overline{\mathrm{PB}}^2-x^2}\,dx,\quad S_2=\int_{\overline{\mathrm{PD}}\cos r}^{\overline{\mathrm{PD}}}\sqrt{\overline{\mathrm{PD}}^2-x^2}\,dx$$

각각 $x=\overline{\mathrm{PB}}\cos(u)$, $x=\overline{\mathrm{PD}}\cos(u)$로 두면 (나), (다)에 의해

$$S_1=\int_{r+w}^{w}\left\{-\overline{\mathrm{PB}}^2\sin^2u\right\}du=\overline{\mathrm{PB}}^2\int_{w}^{r+w}\frac{1-\cos(2u)}{2}du=\frac{\overline{\mathrm{PB}}^2}{2}\left(r-\frac{\sin(2(r+w))}{2}+\frac{\sin(2w)}{2}\right)$$

$$S_2=\int_{r}^{0}\left\{-\overline{\mathrm{PD}}^2\sin^2u\right\}du=\overline{\mathrm{PD}}^2\int_{0}^{r}\frac{1-\cos(2u)}{2}du=\frac{\overline{\mathrm{PD}}^2}{2}\left(r-\frac{\sin(2r)}{2}\right)$$

S_3와 S_4는 사다리꼴의 넓이이므로

$$S_3=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{PB}}\cos w\cos r-\overline{\mathrm{PD}}\cos r\right)\left(\overline{\mathrm{PB}}\cos w\sin r+\overline{\mathrm{PD}}\sin r\right)$$

$$S_4=\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{PB}}\cos w\cos r-\overline{\mathrm{PB}}\cos(r+w)\right)\left(\overline{\mathrm{PB}}\sin(r+w)+\overline{\mathrm{PB}}\cos r\sin r\right)$$

$S(p)=S_1-S_2+S_3-S_4$이므로, (나)를 이용하여 정리하면

$$S(p)=\frac{r}{2}\left(\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{PD}}^2\right)=\frac{r}{2}\left((\overline{\mathrm{PD}}+\overline{\mathrm{AD}})^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{PD}}^2\right)=\frac{\tan p}{2}(12+4\sqrt{3}\cot p)=2\sqrt{3}+6\tan p$$

별해) 삼각형 $\mathrm{PA'B'}$과 삼각형 PAB는 SAS합동이므로 넓이가 같다.

$$\begin{aligned}S(p)&=S(p)+(\text{삼각형}\,\mathrm{PA'B'}\text{의 넓이})+(\text{부채꼴}\,\mathrm{PDD'}\text{의 넓이})\\&\quad-(\text{삼각형}\,\mathrm{PAB}\text{의 넓이})-(\text{부채꼴}\,\mathrm{PDD'}\text{의 넓이})\\&=(\text{부채꼴}\,\mathrm{PBB'}\text{의 넓이})-(\text{부채꼴}\,\mathrm{PDD'}\text{의 넓이})\\&=\frac{r(p)}{2}\left(\overline{\mathrm{PB}}^2-\overline{\mathrm{PD}}^2\right)\\&=\frac{r(p)}{2}\left((\overline{\mathrm{PD}}+\overline{\mathrm{DA}})^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{PD}}^2\right)\\&=\frac{\tan p}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{\tan p}+12\right)\\&=2\sqrt{3}+6\tan p\end{aligned}$$

【2-3】 $2\cot q=\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PD}}+\overline{\mathrm{DA}}=2\cot p+\sqrt{3}$이므로 제시문 (다)의 음함수 미분법에 의해

$$-\frac{2}{\sin^2q}\frac{dq}{dp}=-\frac{2}{\sin^2p},\quad \frac{dq}{dp}=\frac{\sin^2q}{\sin^2p}.$$

$p=\frac{\pi}{6}$일 때, $\cot q=\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$이고 $\sin q=\frac{2}{\sqrt{31}}$이므로, $\frac{dq}{dp}=\frac{\frac{4}{31}}{\frac{1}{4}}=\frac{16}{31}$.

【2-4】 제시문 (라)에 의해,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} S(p(t))dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} S(p(t))dt + \int_{1}^{2} S(p(t))dt + \int_{2}^{\frac{5}{2}} S(p(t))dt \quad \text{(라)}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{2\sqrt{3}+6\tan\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right\}dt + \int_{1}^{2}\left\{2\sqrt{3}+6\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}dt + \int_{2}^{\frac{5}{2}}\left\{2\sqrt{3}+6\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}t\right)\right\}dt$$

$$= 10\sqrt{3}+6\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\tan\left(\frac{\pi}{3}t\right)dt + \int_{2}^{\frac{5}{2}}\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}t\right)dt\right\}$$

제시문 (마)에 의해 $u=\frac{\pi}{3}t$, $v=\pi-\frac{\pi}{3}t$로 치환하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} S(x(t))dt = 10\sqrt{3}+\frac{18}{\pi}\left\{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\tan(u)du - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\tan(v)dv\right\} = 10\sqrt{3}+\frac{18\ln 3}{\pi}$$

따라서 $m=10$, $n=18$이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$\overline{\mathrm{PD}}$, $\overline{\mathrm{DF}}$, r의 관계를 표현하였으면	5
	$r=\tan p$를 구하였으면	5
2-2	$S(p)$를 각 영역의 넓이의 합으로 나누었으면	10
	각 영역의 넓이를 올바르게 계산하였으면 ● 나눈 영역의 개수(N)에 대해 틀리게 계산한 영역당 $20/N$감점	20
	$S(p)$를 올바르게 구하였으면	10
2-3	p와 q사이의 관계식을 구하였으면	15
	음함수 미분을 올바르게 적용했으면	15
	$\frac{dq}{dp}$의 값을 올바르게 계산하였으면	10
2-4	적분식을 t에 따라 세 부분으로 나누었으면	5
	가운데 적분구간($1 \le t < 2$)의 적분값을 올바르게 계산하였으면	10
	왼쪽, 오른쪽 적분구간($\frac{1}{2} \le t < 1$, $2 \le t \le \frac{5}{2}$)의 적분값을 올바르게 계산하였으면 (각 10점)	20
	m과 n의 값을 올바르게 구하였으면	5

[문제 3]

1. 예시 답안

【3-1】
(1)방어작용의 종류: 2차 방어작용 (또는 특이적 방어작용)중 2차 면역 반응이 일어난다. 즉, 전에 침입했던 항원이 다시 침입하면 기억 세포가 형질 세포로 빠르게 분화하여 다량의 항체를 생산하여 항원을 제거한다.
(2)항원이 제거되는 원리: 항체는 Y자 모양의 단백질로서 한 종류의 항원하고만 특이적으로 결합할 수 있다. 즉, 항체는 구조가 맞는 항원과 결합하는 항원 항체 반응이 일어난다.
(3)항원이 제거되는 과정: 이를 통해 항원을 무력화하거나, 덩어리를 형성하여 식균 작용이 쉽게 일어나도록 한다.

【3-2】항원 B를 1차 감염했을 때에는 기억 세포가 적절히 생성되지 않았다.

【3-3】
(1) 조건: 단일 클론 항체로서 정상 세포에는 없고 대장암 세포에만 있는 항원과 결합해야 한다.
(2) 만드는 과정: 대장암 세포를 쥐에게 주입하여 쥐의 몸 안에 생긴 B 림프구를 추출하고 이것을 암세포와 세포 융합하여 잡종 세포를 만든다. 여러 종류의 잡종 세포를 하나씩 분리 배양하여 클론을 얻고, 이로부터 원하는 단일 클론 항체를 대량으로 얻는다. (3) 응용분야: 단일 클론 항체에 방사성 물질이나 형광 물질을 붙여 체내에 주입하면 암, 간염, 에이즈 등의 질병을 신속하고 정확하게 진단할 수 있다. 이 밖에도 단일 클론 항체는 자가 면역 질환, 감염성 질환 등의 치료와 임신 진단 키트 같은 진단 시약에 널리 이용되고 있다.

【3-4】 암모니아에서 요소 합성 저해 --〉 혈중 암모니아 수치가 증가함 (고암모니아혈증) --〉 뇌조직에 신경독성 유발 --〉 간성뇌증 발생

【3-5】
(1)요소가 콩팥(신장)을 통해 배출되지 못함 --〉 혈중 요소 수치 증가 --〉 요독증 발생
(2)세포에서 형성된 물이 혈류로 유입 --〉 혈액의 수분이 신장에서 오줌으로 배출되지 못함 --〉 총 혈액량 증가 --〉 고혈압 발생

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	2차 방어작용 (또는 특이적 방어작용)중 2차 면역 반응인지 맞추면	3
	기억 세포가 형질 세포로 분화하여 다량의 항체를 생산하여 항원을 제거함을 설명하면	3
	항체는 한 종류의 항원하고만 특이적 결합을 설명하면	3
	항원 항체 반응 용어를 기술하면	3
	항원을 무력화 또는 식균 작용에 대해 설명하면	3
3-2	항원 B의 1차 감염에 대해 기술하면	5
	기억 세포 생성 저하에 대해 알맞게 설명하면	5
3-3	단일 클론 항체 용어를 기술하면	3
	대장암 세포에만 있는 항원과 결합해야 함을 기술하면	3
	대장암 세포를 쥐에 주입 후 쥐의 B 림프구 추출하고 암세포와 세포 융합하여 잡종 세포를 만드는 과정을 기술하면	3
	여러 종류의 잡종 세포를 하나씩 분리 배양하여 클론을 만들고 이로부터 단일 클론 항체를 생산하다를 기술하면	3
	질병의 진단 및 치료를 기술하면	3
3-4	암모니아가 요소로의 합성이 억제되어 혈중 암모니아 수치가 증가함을 설명하면	7
	증가한 혈중 암모니아가 뇌에 독성을 유발하여 뇌증을 유발할 수 있음을 설명하면	8
3-5	요소가 신장을 통해 배출되지 못해 혈중 요소 수치가 증가하여 요독증 발생을 설명하면	5
	혈중의 수분이 신장을 통해 배출되지 못해 전체 혈액량(볼륨)이 증가함을 설명하면	5
	증가한 혈액량으로 인해 혈압이 비정상적으로 증가하는 고혈압 발생을 설명하면	5