2024 학년도 논술(AAT) 모의고사 예시답안 및 채점기준(자연계열 I)

[문제 1]

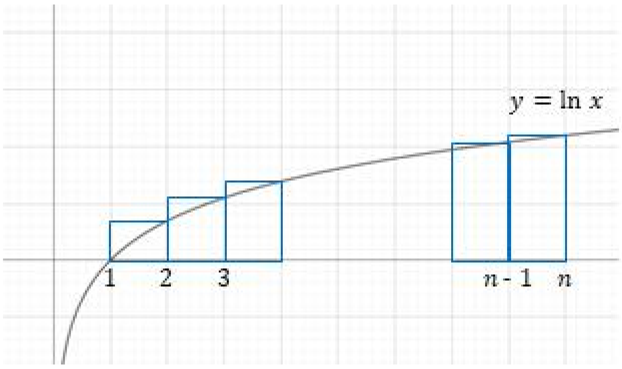
1. 문항 해설 및 예시 답안

【1-1】 집합 $X=\{1,2,\ldots,2n\}$에 속하는 원소 k에 대하여 $f(k)=l$이라 하자. 함수 $f(x)$는 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$이므로 $k\neq l$이다. 또한, 함수 $f(x)$는 X의 모든 원소 x에 대하여 $f\circ f(x)=x$이므로 $f(l)=k$이다. 따라서, a_n은 서로 다른 $2n$개의 원소를 2개씩 짝을 짓는 경우의 수와 같다. 따라서,

$$a_2=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=3,\quad a_3=\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{3!}=15,\quad a_4=\frac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2}{4!}=105$$

이다.

【1-2】 $\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k$이다. 따라서, 아래 그림에서 $\int_1^n \ln x\,dx\le\ln(n!)$가 성립한다.



【1-3】 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\frac{{}_{2n}C_2\times\cdots\times{}_2C_2}{n!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$이다. $b_n=\frac{(2n)!}{2^n a_n}$이므로, 따라서 $b_n=n!$이다.

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{\frac{n!}{3^n}}\le c_n\le\sqrt{n!3^n}$이므로

$$\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{n!}{3^n}}\right)}{\ln(n!)}\le\frac{\ln c_n}{\ln b_n}\le\frac{\ln\left(\sqrt{n!3^n}\right)}{\ln(n!)}$$

이다. 한편,

$$\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{n!}{3^n}}\right)}{\ln(n!)}=\frac{\ln(n!)-n\ln 3}{2\ln(n!)}=\frac{1}{2}-\frac{n\ln 3}{2\ln(n!)}\text{ 이고 }\frac{\ln\left(\sqrt{n!3^n}\right)}{\ln(n!)}=\frac{\ln(n!)+n\ln 3}{2\ln(n!)}=\frac{1}{2}+\frac{n\ln 3}{2\ln(n!)}$$

이다. 이때, **【1-2】**와 제시문 (나)에 의해

$$0 \le \frac{n \ln 3}{2 \ln (n!)} \le \frac{n \ln 3}{2\int_1^n \ln x \, dx} = \frac{n \ln 3}{2(n \ln n - n + 1)} = \frac{\ln 3}{2\left(\ln n - 1 + \dfrac{1}{n}\right)}$$

이고 제시문 (다)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \ln 3}{2 \ln (n!)} = 0$이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{\dfrac{n!}{3^n}}\right)}{\ln (n!)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{n \ln 3}{2 \ln (n!)}\right) = \frac{1}{2} \text{ 이고 } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{n!\,3^n}\right)}{\ln (n!)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{n \ln 3}{2 \ln (n!)}\right) = \frac{1}{2}$$

이다. 따라서, 제시문 (다)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln c_n}{\ln b_n} = \dfrac{1}{2}$이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	답 $a_2 = 3$, $a_3 = 15$, $a_4 = 105$를 구하면 각 10점	30
1-2	$\ln (n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k$ 임을 보이면 15점	30
	$\int_1^n \ln x \, dx \le \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k$ 임을 증명하면 15점	
1-3	수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$을 구하면 20점	60
	부등식 $\dfrac{\ln\left(\sqrt{\dfrac{n!}{3^n}}\right)}{\ln (n!)} \le \dfrac{\ln c_n}{\ln b_n} \le \dfrac{\ln\left(\sqrt{n!\,3^n}\right)}{\ln (n!)}$ 을 구하면 10점	
	부등식 $0 \le \dfrac{n \ln 3}{2 \ln (n!)} \le \dfrac{\ln 3}{2\left(\ln n - 1 + \dfrac{1}{n}\right)}$ 을 구하면 10점	
	극한값 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \ln 3}{2 \ln (n!)} = 0$을 구하면 5점	
	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{\dfrac{n!}{3^n}}\right)}{\ln (n!)} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{n!\,3^n}\right)}{\ln (n!)} = \dfrac{1}{2}$ 을 구하면 각 5점	
	답 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln c_n}{\ln b_n} = \dfrac{1}{2}$을 구하면 5점	

[문제 2]

1. 문항 해설 및 예시 답안

【2-1】미분법을 이용하여 계산하면 $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$이고 $f''(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}$ (단, $x\neq 0$)이다. $w(x)=e^x(x^2-2x+2)-2$라고 하자. 그러면 $w(0)=0$이고 모든 $x>0$에 대하여 $w'(x)=e^x x^2>0$이다. 그러므로 모든 $x>0$에 대하여 $w(x)>0$이므로 $f''(x)>0$이다.

【2-2】$f(x)$가 미분가능 함수이므로 $h(x)$도 미분가능 함수이고

$$h'(x)=cf'(x)-1=\begin{cases}\dfrac{c(e^x(x-1)+1)-x^2}{x^2} & (x\neq 0)\\ \dfrac{c-2}{2} & (x=0)\end{cases}$$ 이다.

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 판별하기 위해 $\varphi(x)=c(e^x(x-1)+1)-x^2$의 개형을 보자. $\varphi'(x)=x(ce^x-2)=0$의 해는 $x=0$과 $x=\ln\dfrac{2}{c}>0$이다. 함수 $\varphi(x)$의 증감표와 그래프 개형은 다음과 같다.

	$\cdots$	$x=0$	$\cdots$	$x=\ln\dfrac{2}{c}$	$\cdots$
φ'	+	0	−	0	+
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
φ		0		−	

즉, 함수 $y=\varphi(x)$는 x축과 $(0,0)$과 $(k,0)$인 서로 다른 두 점에서 만난다. 여기서 k는 $k>\ln\dfrac{2}{c}>0$이다. $x\neq 0$인 모든 $x<k$에 대하여 $\varphi(x)<0$이고 $x>k$에 대하여 $\varphi(x)>0$이다. $h'(0)=\dfrac{c-2}{2}<0$이므로 모든 $x<k$에 대하여 $h'(x)<0$이고 $x>k$에 대하여 $h'(x)>0$이다. 즉, 함수 $h(x)$는 열린구간 $(-\infty,k)$에서 감소함수이고 열린구간 (k,∞)에서 증가함수이다. 그러므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 극소이다.

【2-3】미분법을 이용하여 계산하면 $g(x)=f(x)-xf'(x)=\begin{cases}\dfrac{(2-x)e^x-2}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$이다. 방정식 $g(x)=0$의 실근의 존재성을 보이기 위해 함수 $\phi(x)=(2-x)e^x-2$와 x축과의 교점을 알아보자. 모든 $x<1$에 대하여 함수 $\phi'(x)>0$이고 모든 $x>1$에 대하여 $\phi'(x)<0$이므로 함수 $\phi(x)$는 $x=1$에서 극대를 가진다. $\phi(0)=0$, $\phi(1)=e-2>0$, $\phi(2)=-2<0$이므로 사잇값의 정리에 의해 방정식 $\phi(x)=0$의 실근은 $x=0$과 열린구간 $(1,2)$에서 한 개 존재한다. $g(0)\neq 0$이므로 $x=0$은 방정식 $g(x)=0$의 실근이 아니다. 그러므로 방정식 $g(x)=0$의 실근 α는 열린구간 $(1,2)$에서 오직 한 개 존재한다.

【2-4】 $f'(1)=1$이고 【2-1】에 의해 함수 $f'(x)$는 열린구간 $(0,\infty)$에서 증가함수이므로 모든 $x>1$에 대하여 $f'(x)>1$이다. 【2-3】에 의해 $1<\alpha<2$이므로 $0<\dfrac{1}{f'(\alpha)}<1$이다. 즉, $0<b<\beta<1$이다. 함수 $q(x)=bf(x)-x$를 고려하자. $0<b<2$이므로 【2-2】에 의해 함수 $q(x)$가 열린구간 $(-\infty,k)$에서 감소하고 열린구간 (k,∞)에서 증가하는 양의 실수 k가 존재한다. 함수 $q(x)$가 $x=k$에서 극소이므로 $q'(k)=bf'(k)-1=0$이다.

즉, $b=\dfrac{1}{f'(k)}$이다. $0<b<\beta$이므로 $0<\dfrac{1}{f'(k)}<\dfrac{1}{f'(\alpha)}$이다. 즉, $f'(k)>f'(\alpha)$이다. 그러면 【2-1】에 의해 함수 $f'(x)$는 $(0,\infty)$에서 증가함수이므로 $\alpha<k$이다. $g(1)=e-2>0$이고 $g(2)=-1$이므로 【2-3】에 의해 함수 $g(x)$는 모든 $x>\alpha$에 대해서 $g(x)<0$이다. $\alpha<k$이므로 $g(k)<0$이다. 그러면 다음이 성립한다.

$$g(k)=f(k)-kf'(k)=bf'(k)f(k)-kf'(k)=f'(k)(bf(k)-k)=f'(k)q(k)<0$$

그러므로 $f'(k)>0$이므로 $q(k)<0$이다. 【2-2】에 의해 방정식 $q(x)=0$는 열린구간 $(-\infty,k)$에서 실근 x_1와 열린구간 (k,∞)에서 실근 x_2를 가진다. 그리고 $q'(x_1)=bf'(x_1)-1<0$이므로 $f'(x_1)<\dfrac{1}{b}$이고, $q'(x_2)=bf'(x_2)-1>0$이므로 $f'(x_2)>\dfrac{1}{b}$이다.

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$f''(x)=\dfrac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}$임을 보이면 10점 모든 $x>0$에 대하여 $f''(x)>0$임을 보이면 20점	30
2-2	$h'(x)=\begin{cases}\dfrac{c(e^x(x-1)+1)-x^2}{x^2} & (x\neq 0)\\ \dfrac{c-2}{2} & (x=0)\end{cases}$임을 보이면 10점 모든 $x<k$에 대하여 $h'(x)<0$이고 $x>k$에 대하여 $h'(x)>0$임을 보이면 20점	30
2-3	$g(\alpha)=0$인 실수 α가 오직 한 개 존재임을 보이면 20점 $1<\alpha<2$임을 보이면 10점	30
2-4	$bf(x)-x=0$이 서로 다른 두 개의 실근을 가짐을 보이면 30점 $f'(x_1)<\dfrac{1}{b}$이고 $f'(x_2)>\dfrac{1}{b}$임을 보이면 10점	40

[문제 3]

1. 문항 해설 및 예시 답안

【3-1-(1)】 융합 전 총 질량은
수소원자핵(양성자) x 4 = 1.7× 10-27x4= 6.8× 10-27kg이고,
융합 후 총 질량은 6.749× 10-27kg이다.
이 때 발생한 질량손실은 ⊿m = 0.051× 10-27kg이다.
질량손실에 해당되는 에너지는 중성자의 운동에너지 합으로 전환되므로
E = N•mnvn2/2 = ⊿m c2가되고
이 때 속도인 vn을구하면 105m/s가 된다.

【3-1-(2)】 ㄱ 단계에서 중심핵의 부피는 감소하고 태양 전체의 부피는 증가한다.
그 중심핵의 부피가 감소하는 이유는 수소의 핵융합이 끝난 후 헬륨의 핵융합이 시작될 정도로 높은 온도에 다다르지 않았기 때문에 헬륨으로 구성된 중심핵은 중력에 의해 점차 수축하기 때문이다. 반면, 중심핵의 수축에 의해 발생한 중력 수축 에너지가 중심부를 둘러싼 수소 외곽층에 전달되어 외곽층에서 수소 핵융합 반응이 일어나고, 이에 따라 바깥층은 팽창하기 때문에 전체적인 태양의 크기는 증가한다.

【3-2-(1)】기본적인 산-염기 중화반응에 대한 이해를 바탕으로, 산화 환원반응과 반응 계수(몰 비)를 기술할 수 있어야 한다. 질산과 수산화 칼슘, 황산과 수산화 칼슘의 반응을 모두 작성하여야 한다.

답: $2HNO_3 + Ca(OH)_2 \rightarrow Ca(NO_3)_2 + 2H_2O$
$H_2SO_4 + Ca(OH)_2 \rightarrow CaSO_4 + 2H_2O$

【3-2-(2)】산염기 중화반응에 대한 이해를 바탕으로 중화반응에 참여하는 분자들의 반응 계수와 분자량에 대해 답할 수 있어야 한다. 이산화 탄소가 물에 용해되어 탄산이 형성되는 반응식을 기술하고, 이를 바탕으로 탄산과 수산화 칼슘의 중화반응을 추론할 수 있어야 한다.

답: 수산화 칼슘 740 g 은 분자량(74 g/mol)을 고려하면 10몰에 해당한다. 이 양의 수산화 칼슘으로 중화할 수 있는 질산은 20몰이며, 그 분자량 (63 g/mol)을 고려하면 1260 g 에 해당한다. 같은 양의 수산화 칼슘으로 중화할 수 있는 황산은 10몰이며, 분자량 (98 g/mol)을 고려하면, 980 g 에 해당한다.
이산화 탄소의 경우, 물에 용해되어 탄산이온을 형성하고 ($CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$),
탄산이온이 수산화 칼슘과 중화반응 ($H_2CO_3 + Ca(OH)_2 \rightarrow CaCO_3 + 2H_2O$) 한다고 생각할 수 있다. 수산화 칼슘 10몰과 중화반응할 수 있는 탄산이온, 탄산이온을 생성하는데에 필요한 이산화 탄소, 모두 10몰이 필요하다. 이산화 탄소의 분자량 (44 g/mol)을 고려하면, 수산화 칼슘 740 g으로 이산화 탄소 10몰, 즉 440 g을 중화할 수 있다.

【3-2-(3)】 유전 현상에서 유전형과 표현형의 차이를 이해하고 있는지를 묻는 문제로, 제시문과 문제에서 제시한 다인자 유전의 특징을 이해하여 유전자형에 따라 나올 수 있는 표현형의 확률을 계산할 수 있어야 한다.
아이에게서 나타날 수 있는 눈색의 유전자형은 AABB, AaBB, AABb, AaBb, aaBB, aaBb이다. 자료에 눈색은 대문자료 표시되는 대립유전자의 수에 의해서만 결정된다고 하였으므로 자손이 가질 수 있는 눈색을 정하는 유전자의 수는 4(AABB), 3(AaBB, AABb, AaBB), 2(AaBb, aaBB), 1(aaBb)이므로 눈색 표현형의 수는 총 4가지이다.

부모의 생식세포	AB	AB	aB	aB
AB	AABB (4)	AABB (4)	AaBB (3)	AaBB (3)
Ab	AABb (3)	AABb (3)	AaBb (2)	AaBb (2)
aB	AaBB (3)	AaBB (3)	aaBB (2)	aaBB (2)
ab	AaBb (2)	AaBb (2)	aaBb (1)	aaBb (1)

※ ( ) 안의 수는 대문자의 개수
각 눈색 표현형이 나올 확률은 다음과 같다.
대문자의 개수가 4개일 확률: 2/16 (12.5%)
대문자의 개수가 3개일 확률: 6/16 (37.5%)
대문자의 개수가 2개일 확률: 6/16 (37.5%)
대문자의 개수가 1개일 확률: 2/16 (12.5%)

2. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1(1)	융합 전 후 총 질량을 각각 구하고 이 둘의 차를 통해 질량손실 계산	10
	질량손실에 해당하는 에너지를 계산하거나 활용함.	5
	질량손실 에너지가 운동에너지로 전환됨을 활용하여 수식을 세우고 이를통하여 속도를 계산함	10
3-1(2)	중심핵의 부피는 감소하고 태양 전체의 부피는 증가함을 올바르게 추정	10
	수소의 핵융합이 끝난 후 헬륨의 핵융합이 시작될 정도로 높은 온도에 다다르지 않았기 때문에 헬륨으로 구성된 중심핵은 중력에 의해 점차 수축하여 부피가 감소함을 설명	5
	중심핵의 수축에 의해 발생한 중력 수축 에너지가 외곽층에 전달되어 수소 핵융합 반응을 일어나고 태양의 부피가 증가함을 설명	10
3-2(1)	두 반응식 모두 기재함 (반응 계수도 맞게)	10
	*부분 점수 알짜이온 반응식 (H^+ + OH^- → H_2O) 혹은 중화반응이라고 기입, 혹은 반응계수가 틀린 경우.	3
3-2(2)	질량과 분자량을 바탕으로 중화반응에 이용하는 수산화 칼슘의 몰 수는 10 몰. 중화할 수 있는 질산의 양은 분자량 63 g/mol을 고려하여, 1260 g (20 mol x 63 g/mol)	5
	질량과 분자량을 바탕으로 중화반응에 이용하는 수산화 칼슘의 몰 수는 10 몰. 중화할 수 있는 황산의 양은 분자량 98 g/mol을 고려하여, 980 g (10 mol x 98 g/mol)	5
	이산화 탄소가 물에 전부 용해되어 탄산 이온이 형성되는 용해 (CO_2 + H_2O → H_2CO_3) 탄산 이온과 수산화 칼슘의 중화반응 (H_2CO_3 + $Ca(OH)_2$ → $CaCO_3$ + $2H_2O$) 이때, 수산화 칼슘과 중화 반응하는 이산화 탄소의 몰수비는 1:1 이므로, 10몰의 이산화 탄소가 중화반응에 참여한다. 440 g (10 mol x 44 g/mol)	20
	*분자량 계산의 실수는 부분 점수는 각 질문당 (2점, 2점, 5점)을 배정	2/2/5
3-2(3)	눈색 표현형의 수 4가지와 각 표현형이 나올 확률을 모두 맞추면 20점 눈색 표현형의 총수를 맞추면 4점 대문자의 개수에 따른 각 표현형이 나올 확률을 맞추면 표현형당 4점씩	20