$$\frac{\pi}{12}n^2 - T_n \le S_n \le \frac{\pi}{12}n^2$$

이 성립한다. 또한,

$$\sin\theta_n = \frac{n}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}},\ \tan\theta_n = \frac{n}{n^2+n}$$

이므로, $\lim_{n\to\infty} sin\theta_n = \lim_{n\to\infty} tan\theta_n = 0$ 이고, 제시문 (마)와 (바)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\theta_n = 0$$

이므로, 부등식

$$\frac{\pi}{12} - \frac{T_n}{n^2} \le \frac{S_n}{n^2} \le \frac{\pi}{12}$$

와 제시문 (바)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{\pi}{12}$ 이다.

[문항카드 10]

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사
전형명		논술(AAT)전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열Ⅱ / 1번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	미분계수, 수열, 함수의 그래프, 함수의 극한
예상 소요 시간		전체 시험시간 100분 중 30분

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(나) $x = a$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고, 그 값이 모두 L이면

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

(다) 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(라) 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r \ne 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(마) 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = \alpha \quad (\alpha\text{는 실수})$$

이면

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \alpha$$

[문항]

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$과 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(Ⅰ) $2n-1 \le x \le 2n$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = a_n(x-2n+1)^4 + b_n(x-2n+1)^2 + c_n(x-2n+1) + \frac{1}{2^{n-1}}$$

이다.

(Ⅱ) $2n-2 < x < 2n-1$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = f(4n-2-x)$$

이다.

다음 물음에 답하시오.

【1-1】 c_{2023}의 값을 구하시오. (20점)

【1-2】 모든 자연수 n에 대하여,

$$(2a_n + b_n)(2a_{n+1} + b_{n+1}) \le 0$$

임을 증명하시오. (30점)

【1-3】 $b_1 = -4$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = -1$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\int_2^{10} |f'(x)|dx = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수) (35점)

(2) 양수 t에 대하여, 함수 $g(x) = |f(x)-t|$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하지 않은 모든 점의 개수를 $m(t)$라 하자. $\lim_{t \to 0+} \frac{m(t)}{\log_2 t}$의 값을 구하시오. (35점)

3. 출제 의도

1. 미분계수의 정의를 이해하고, 함수의 성질을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 미분계수의 정의를 이해하고, 함수의 성질을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는지와 수열의 관계를 구할 수 있는지를 평가한다.

3-1. 함수의 그래프의 개형을 이해하고, 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.

3-2. 함수의 극한의 대소 관계를 이해하고, 함수의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (가) 미분계수
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.
제시문(다)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
제시문(라)	교육과정	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문(마)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문항1	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (가) 미분계수 [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.
문항2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (가) 미분계수 [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다.
문항3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [수학Ⅰ] - (3) 수열 - (가) 등차수열과 등비수열 [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	권오남 외 14인	㈜교학사	2020년	p126-p132
	수학 Ⅱ	박교식 외 19인	㈜동아출판	2020년	p11-p28, p53-p58, p122-p135

5. 문항 해설

[1-1] 주어진 성질을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

[1-2] 주어진 성질을 활용하여 미분계수를 구하고 수열의 관계를 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

[1-3]

(1) 함수의 그래프의 개형을 이해하고 주어진 성질을 활용하여 정적분을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

(2) 함수의 극한의 대소 관계를 이해하고 주어진 성질을 활용하여 함수의 극한을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$\lim_{h\to0+}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{h}=c_n$임을 보인다.	5
	$\lim_{h\to0-}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{h}=-c_n$임을 보인다.	5
	$c_{2023}=0$을 구한다.	10
2	$\lim_{h\to0+}\frac{f(2n+h)-f(2n)}{h}=-(4a_{n+1}+2b_{n+1})$임을 보인다.	5
	$\lim_{h\to0-}\frac{f(2n+h)-f(2n)}{h}=4a_n+2b_n$임을 보인다.	5
	$-(2a_{n+1}+b_{n+1})=2a_n+b_n$임을 보인다.	10
	$(2a_n+b_n)(2a_{n+1}+b_{n+1})=-(2a_n+b_n)^2\le0$임을 보인다.	10
3-1	$2a_1+b_1=0$을 구한다.	5
	자연수 n에 대하여 $2a_n+b_n=0$을 구한다.	5
	$\int_2^{10}\lvert f'(x)\rvert dx=\int_2^3 f'(x)\,dx-\int_3^4 f'(x)\,dx+\cdots+\int_8^9 f'(x)\,dx-\int_9^{10} f'(x)\,dx$ 임을 보인다.	10
	$p+q=8+79=87$을 구한다.	15
3-2	자연수 k에 대하여 $\frac{1}{2^k}\le t<\frac{1}{2^{k-1}}$이면 $m(t)=2k$임을 보인다.	10
	$0<t<1$일 때, $2\left(-1+\frac{1}{\log_2 t}\right)<\frac{m(t)}{\log_2 t}\le-2$가 성립함을 보인다.	10
	$\lim_{t\to0+}\frac{m(t)}{\log_2 t}=-2$를 구한다.	15

7. 예시 답안

【1-1】

함수 $f(x)$는 $x=2n-1$에서 미분가능하므로 (단, n은 자연수),

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{h}$$

임을 알 수 있다. 한편, 문제의 조건 (Ⅰ)과 (Ⅱ)를 이용하면,

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{h}=\lim_{h\to0+}(a_nh^3+b_nh+c_n)=c_n$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2n-1-h)-f(2n-1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(2n-1+h)-f(2n-1)}{-h}=-c_n$$

이므로, $c_n=-c_n$, 즉, $c_n=0$임을 알 수 있다. 따라서, $c_{2023}=0$이다.

【1-2】

함수 $f(x)$는 $x=2n$에서 미분가능하므로 (단, n은 자연수),

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2n+h)-f(2n)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(2n+h)-f(2n)}{h}$$

임을 알 수 있다. 한편, 문제의 조건 (Ⅰ)과 (Ⅱ)를 이용하면,

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2n+h)-f(2n)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{f(2n+2-h)-f(2n+2)}{h}=-(4a_{n+1}+2b_{n+1})$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2n+h)-f(2n)}{h}=4a_n+2b_n$$

이므로, $-(2a_{n+1}+b_{n+1})=2a_n+b_n$임을 알 수 있다. 따라서,

$$(2a_n+b_n)(2a_{n+1}+b_{n+1})=-(2a_n+b_n)^2\le0$$

이다.

【1-3】

(1) 문제의 조건에 의해, $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}f(2-x)=f(2)=a_1+b_1+1=-1$이므로, $a_1=2$임을 알 수 있다. 따라서, $2a_1+b_1=0$이다. **【1-2】**에 의하여, 자연수 n에 대하여 $2a_n+b_n=0$임을 알 수 있다.

이로부터 $2n-1\le x\le 2n$인 실수 x에 대하여 (단, n은 자연수),

$$f(x)=a_n(x-2n+1)^4-2a_n(x-2n+1)^2+\frac{1}{2^{n-1}},$$

$$f'(x)=4a_n(x-2n+1)^3-4a_n(x-2n+1)=4a_n(x-2n+1)\{(x-2n+1)^2-1\}$$

이다. 그러므로,

$$\begin{aligned}\int_2^{10}\lvert f'(x)\rvert dx&=\int_2^3\lvert f'(x)\rvert dx+\int_3^4\lvert f'(x)\rvert dx+\cdots+\int_8^9\lvert f'(x)\rvert dx+\int_9^{10}\lvert f'(x)\rvert dx\\&=\int_2^3 f'(x)\,dx-\int_3^4 f'(x)\,dx+\cdots+\int_8^9 f'(x)\,dx-\int_9^{10} f'(x)\,dx\\&=\{f(3)-f(2)\}-\{f(4)-f(3)\}+\cdots+\{f(9)-f(8)\}-\{f(10)-f(9)\}=\sum_{n=1}^{4}2\left(\frac{1}{2^n}+1\right)=\frac{79}{8}\end{aligned}$$

이다. 따라서, $p+q=8+79=87$이다.

(2) 우선, $m(t)$를 구하자. $t \ge 1$이면, $m(t)=0$이다. 또한, 자연수 k에 대하여 $\frac{1}{2^k} \le t < \frac{1}{2^{k-1}}$이면, $m(t)=2k$임을 알 수 있다. 한편, 부등식 $\frac{1}{2^k} \le t < \frac{1}{2^{k-1}}$은 $-\log_2 t \le k < -\log_2 t+1$로 쓸 수 있다. 따라서, $0<t<1$일 때, $-2\log_2 t \le m(t) < 2(-\log_2 t+1)$이다. 이로부터 $0<t<1$일 때,

$$2\left(-1+\frac{1}{\log_2 t}\right) < \frac{m(t)}{\log_2 t} \le -2$$

가 성립함을 알 수 있다. $\lim_{t \to 0+} 2\left(-1+\frac{1}{\log_2 t}\right) = -2$이므로, 함수의 극한의 대소관계에 의해 $\lim_{t \to 0+}\frac{m(t)}{\log_2 t} = -2$이다.

[문항카드 11]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT)전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ / 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수, 지수함수, 합성함수 및 곱의 미분, 적분
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 35분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(나) $y=a^x\ (a>0, a \ne 1)$이면,

$$y' = a^x \ln a$$

이다. 또한,

$$\lim_{h \to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a$$

(다) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(라) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$y' = f'(g(x))g'(x)$$

(마) 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

[문항]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(Ⅰ) $f(x+y)=2023^{y}f(x)+2023^{x}f(y)$

(Ⅱ) $g(x+y)=2023^{xy(2x^2+3xy+2y^2)}g(x)g(y)$

(Ⅲ) $g(x)>0$

다음 물음에 답하시오.

【2-1】 모든 실수 x에 대하여,

$$f'(x)-f(x)\ln 2023=f'(0)\,2023^{x}$$

임을 증명하시오. (25점)

【2-2】 $f(2023)=2023$일 때, 함수 $f(x)$를 구하시오. (40점)

【2-3】 $g(2023)=2023$일 때, 함수 $g(x)$를 구하시오. (45점)

3. 출제 의도

1. 도함수와 미분계수의 정의를 이해하고 있는지를 평가한다.

2. 지수함수, 합성함수 및 함수의 곱의 미분을 구할 수 있는지를 평가한다.

3. 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (나) 도함수
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분
	성취기준·성취수준	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (나) 도함수
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
제시문(라)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
	성취기준·성취수준	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문(마)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
문항1	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (나) 도함수 [미적분] - (2) 미분법 - (가) 여러 가지 함수의 미분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문항2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
문항3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (가) 미분계수 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	이준열 외 9인	㈜천재교육	2020년	p53-p72, p114-p119
	미적분	고성은 외 5인	㈜좋은책신사고	2020년	p49-p57, p80-p86

5. 문항 해설

[2-1] 함수가 만족하는 특정 조건으로부터 도함수의 정의를 사용하여 함수와 도함수가 만족하는 간단한 조건을 증명하는 문제이다.

[2-2] 함숫값과 도함수에 관한 정보로부터 함수를 결정하는 문제이다.

[2-3] 함수가 만족하는 특정 조건으로부터 도함수의 정의를 사용하고 함숫값과 도함수에 관한 정보로부터 함수를 결정하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$x=y=0$을 대입하여 $f(0)=0$을 얻는다.	5
	$f(0)=0$으로부터 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{2023^{h}-1}{h}f(x)+2023^{x}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$	10

	을 얻는다.	
	h를 0으로 보내는 극한으로부터 $f'(x)-f(x)\ln 2023 = 2023^x f'(0)$을 얻는다.	10
2	함수의 곱의 미분법과 문항 1의 결과로부터 $\{2023^{-x}f(x)\}' = -2023^{-x}\ln 2023 f(x) + 2023^{-x}f'(x) = f'(0)$ 을 얻는다.	15
	$h(x) = 2023^{-x}f(x)$이라 하면, 도함수 $h'(x) = f'(0)$은 상수함수임을 관찰하여 $h(x) = f'(0)x + C$을 얻는다. (C는 적분상수)	10
	$h(0) = f(0) = 0$으로부터 $C = 0$을 관찰하여 $f(x) = f'(0)x2023^x$임을 얻는다.	5
	$f(2023) = 2023$으로부터 $f(x) = x2023^{x-2023}$을 얻는다.	10
3	$x = y = 0$을 대입하고 함숫값 $g(0)$이 양의 실수임을 이용하여 $g(0) = 1$을 얻는다.	5
	$2023^{-\frac{(x+y)^4}{2}}g(x+y) = 2023^{-\frac{x^4}{2}}g(x)2023^{-\frac{y^4}{2}}g(y)$을 얻는다.	10
	$k(x) = \log_{2023}\left(2023^{-\frac{x^4}{2}}g(x)\right)$라 하고, $k(x+y) = k(x) + k(y)$가 모든 실수 x, y에 대해 성립함을 관찰한다.	10
	$g(0) = 1$으로부터 $k(0) = 0$을 얻고 $k(x) = cx$인 상수 c가 존재함을 관찰한다.	10
	$g(2023) = 2023$으로부터 c를 구하고 $g(x) = 2023^{\frac{x^4 - 2023^3 x}{2} + \frac{x}{2023}}$임을 보인다.	10

7. 예시 답안

【2-1】

$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y)$에 $x = y = 0$을 대입하면, $f(0) = 0$을 얻을 수 있다.

$f(x+y) = 2023^y f(x) + 2023^x f(y)$에 $y = h$를 대입하면, $f(x+h) = 2023^h f(x) + 2023^x f(h)$이다. 양변에서 $f(x)$를 빼고 $h \neq 0$인 h로 나누면 $f(0) = 0$이므로

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2023^h - 1}{h}f(x) + 2023^x\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

을 얻는다.

h를 0으로 보내는 극한을 취하면,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2023^h - 1}{h}f(x) + 2023^x\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

을 얻고 미분계수 및 도함수의 정의에 의해 $f'(x) = \ln 2023 f(x) + 2023^x f'(0)$을 얻는다. 정리하면 $f'(x) - f(x)\ln 2023 = 2023^x f'(0)$이다.

【2-2】

곱의 미분법에 의해 $\{2023^{-x}f(x)\}' = -2023^{-x}\ln 2023 f(x) + 2023^{-x}f'(x)$이다.

【2-1】에 의해 $f'(x) - f(x)\ln 2023 = 2023^x f'(0)$이므로

$$\{2023^{-x}f(x)\}' = -2023^{-x}\ln 2023 f(x) + 2023^{-x}f'(x) = f'(0)$$

이다.

$h(x) = 2023^{-x}f(x)$이라 하면, 모든 실수 x에 대해 함수 $h'(x) = f'(0)$은 상수함수이므로 $h(x) = f'(0)x + C$이다. (C는 적분상수)

$h(0) = f(0) = 0$이므로 $C = 0$이다. 따라서 $2023^{-x}f(x) = h(x) = f'(0)x$이고 $f(x) = f'(0)x2023^x$이다.

$f(2023) = 2023$이므로 $f'(0) = 2023^{-2023}$이다. 따라서 $f(x) = x2023^{x-2023}$이다.

【2-3】

$g(x+y) = 2023^{xy(2x^2+3xy+2y^2)}g(x)g(y)$에 $x = y = 0$을 대입하면, $g(0) = g(0)g(0)$이고 모든 실수 x에 대해서 함숫값 $g(x)$는 양의 실수이므로 $g(0) = 1$이다.

$2023^{xy(2x^2+3xy+2y^2)} = 2023^{\frac{(x+y)^4}{2} - \frac{x^4}{2} - \frac{y^4}{2}}$이므로 조건 (ⅱ) 에 의해,

$$2023^{-\frac{(x+y)^4}{2}}g(x+y) = 2023^{-\frac{x^4}{2}}g(x)2023^{-\frac{y^4}{2}}g(y)$$

임을 알 수 있다.

$k(x) = \log_{2023}\left(2023^{-\frac{x^4}{2}}g(x)\right)$라 하면, $k(x+y) = k(x) + k(y)$가 모든 실수 x, y에 대해 성립한다.

$g(0) = 1$이므로 $k(0) = \log_{2023}g(0) = 0$이다.

$k(x+h) - k(x) = k(h) - k(0)$이므로 $k'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}$에서 $k'(x) = k'(0)$을 얻고 $k(0) = 0$이므로 $k(x) = cx$인 상수 c가 존재한다.

$g(x) = 2023^{\frac{x^4}{2} + cx}$이고 $g(2023) = 2023$이므로 $c = -\frac{2023^3}{2} + \frac{1}{2023}$이다. $g(x) = 2023^{\frac{x^4 - 2023^3 x}{2} + \frac{x}{2023}}$이다.

[문항카드 12]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT)전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅱ / 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분과 급수의 합 사이의 관계, 여러 가지 적분법
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 35분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α,β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(다) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\beta$$

일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

(라) 닫힌구간 $[a,b]$에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[문항]

자연수 m에 대하여, 구간 $(0,\infty)$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

(Ⅰ) 구간 $(0,\infty)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하고 도함수 $g'(x)$는 연속이다.

(Ⅱ) 모든 양수 x에 대하여 $g(x)>0$이다.

(Ⅲ) 함수 $h(x)=f(g(x))g'(x)$는 구간 $[m,\infty)$에서 감소한다.

다음 물음에 답하시오.

【3-1】 $n\ge m$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{i=m+1}^{n+1}h(i)<\int_{g(m)}^{g(n+1)}f(x)\,dx<\sum_{i=m}^{n}h(i)$$

를 증명하시오. (30점)

【3-2】 정적분

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{x}}\,dx$$

의 정수부분을 구하시오. (40점)

【3-3】 자연수 n에 대하여

$$a_n=\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\left[\frac{k^2+2k-1}{(k+1)^2}\ln\left(\frac{k+1}{k^2+1}\right)\right]$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. (50점)

3. 출제 의도

1. 치환적분법과 평균값 정리를 이해하고, 정적분에 대한 간단한 성질을 증명할 수 있는지를 평가한다.

2. '정적분과 급수의 합 사이의 관계'를 이해하고, 정적분을 근사할 수 있는지를 평가한다.

3. '정적분과 급수의 합 사이의 관계'와 수열의 극한의 대소 관계를 이해하고, 수열의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.
제시문(나)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
	성취기준·성취수준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[미적분] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수

문항 및 제시문		관련 성취기준
		있다.
제시문(라)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
	성취기준· 성취수준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항1	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 [미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용
	성취기준· 성취수준	[12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문항2	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용
	성취기준· 성취수준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.
문항3	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용 [미적분] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한 [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법 [미적분] - (3) 적분법 - (나) 정적분의 활용
	성취기준· 성취수준	[12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	박교식 외 19인	㈜동아출판	2020년	p77-p88, p122-p135
	미적분	김원경 외 14인	㈜비상교육	2020년	p11-p19, p120-p146

5. 문항 해설

[3-1] 치환 적분과 평균값 정리를 활용하여 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 대한 간단한 성질을 증명할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

[3-2] 주어진 성질을 활용하여 정적분을 근사할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

[3-3] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하고 주어진 성질을 활용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지를 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	평균값 정리를 활용하여 $h(c_i)=F(i+1)-F(i)$를 만족하는 c_i가 열린구간 $(i,\, i+1)$에 존재함을 보인다.	5
	자연수 $i\ \ (i \geq m)$에 대하여 $h(i+1)<h(c_i)<h(i)$가 성립함을 보인다.	5
	$\sum\limits_{i=m+1}^{n+1} h(i)<F(n+1)-F(m)<\sum\limits_{i=m}^{n} h(i)$을 유도한다.	10
	$F(n+1)-F(m)=\int_{g(m)}^{g(n+1)} f(u)\,du$을 보인다.	10
2	문제의 조건을 만족시키는 두 함수 $f(x),\ g(x)$를 구한다. 예) $f(x)=2^{\frac{1}{x}},\ g(x)=\dfrac{1}{x+3}$	5
	함수 $h(x)$가 구간 $[m,\infty)$에서 감소함을 보인다. 예) $h(x)=f(g(x))\,g'(x)=\dfrac{-2^{x+3}}{(x+3)^2}$는 구간 $[1,\infty)$에서 감소	10
	$2<\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{x}}\,dx$, $\dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{x}}\,dx<3$임을 각각 보인다. (각 10점)	20
	정수부분 2를 구한다.	5
3	문제의 조건을 만족시키는 두 함수 $f(x),\ g(x)$를 구한다. 예) $f(x)=-\ln x,\ g(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$	5
	함수 $h(x)$가 구간 $[m,\infty)$에서 감소함을 보인다. 예) $h(x)=f(g(x))\,g'(x)=\left\{-\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)\right\}\left\{\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right\}$는 구간 $[1,\infty)$에서 감소	10
	모든 자연수 n에 대하여 $c_n<a_n$이 되도록 하는 수열 $\{c_n\}$의 일반항을 구한다.	10
	모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이 되도록 하는 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구한다.	10
	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-4$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=-4$를 구한다. (각 5점)	10
	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-4$를 구한다.	5

7. 예시 답안

【3-1】

함수 $h(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$라 하자. 각각의 자연수 i에 대하여, 평균값 정리에 의해

$$h(c_i)=\frac{F(i+1)-F(i)}{(i+1)-i}=F(i+1)-F(i)$$

를 만족하는 c_i가 열린구간 $(i,\ i+1)$에 존재한다.

함수 $h(x)$는 구간 $[m,\infty)$에서 감소하므로 각각의 자연수 $i\ \ (i\ge m)$에 대하여

$$h(i+1)<h(c_i)<h(i)$$

가 성립한다. 따라서

$$\sum_{i=m+1}^{n+1}h(i)<F(n+1)-F(m)<\sum_{i=m}^{n}h(i)$$

이다. 한편, 치환적분법에 의해

$$F(n+1)-F(m)=\int_m^{n+1}f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(m)}^{g(n+1)}f(u)\,du$$

이다. 따라서,

$$\sum_{i=m+1}^{n+1}h(i)<\int_{g(m)}^{g(n+1)}f(x)\,dx<\sum_{i=m}^{n}h(i)$$

이다.

【3-2】

$f(x)=2^{\frac{1}{x}},\ g(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 이라 두자.

그러면 $h(x)=f(g(x))\,g'(x)=\dfrac{-2^{x+3}}{(x+3)^2}$ 이고 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}h(i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{-2^{i+3}}{(i+3)^2}$ 이다.

한편, $\displaystyle\sum_{i=1}^{1}h(i)=-\frac{2^4}{4^2},\ \sum_{i=1}^{3}h(i)=-\left(\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}\right),\ \sum_{i=1}^{4}h(i)=-\left(\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}+\frac{2^7}{7^2}\right)$이다.

구간 $(0,\infty)$ 에서 함수 $f(x)$는 연속이며 함수 $g(x)$는 미분가능이며 $g'(x)$는 연속이다.

또한, $x>1$일 때 $h'(x)=-\dfrac{2^{x+3}\{(x+3)\ln 2-2\}}{(x+3)^3}<0$이므로 함수 $h(x)$ 는 구간 $[1,\infty)$에서 감소한다.

따라서, **【3-1】**에 의해

$$-\left(\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}+\frac{2^7}{7^2}\right)=\sum_{i=2}^{4}h(i)<\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{7}}f(x)\,dx<\sum_{i=1}^{3}h(i)=-\left(\frac{2^4}{4^2}+\frac{2^5}{5^2}+\frac{2^6}{6^2}\right)$$

이므로 $2.03\approx\dfrac{2^3}{4^2}+\dfrac{2^4}{5^2}+\dfrac{2^5}{6^2}<\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{x}}\,dx<\frac{2^4}{5^2}+\frac{2^5}{6^2}+\frac{2^6}{7^2}\approx 2.84$이다.

따라서, 정답은 2이다.

【3-3】

$f(x)=-\ln x,\ g(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 라 두자.

그러면 $h(x)=f(g(x))\,g'(x)=\left\{-\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)\right\}\left\{\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right\}$이고

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}h(i)=-\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]$이다.

구간 $(0,\infty)$ 에서 함수 $f(x)$는 연속이며 함수 $g(x)$는 미분가능이며 $g'(x)$는 연속이다.

$x>1$일 때 $h'(x)=-\left[\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)\left\{\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right\}^2+\left(\ln\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)\left\{\dfrac{4}{(x+1)^3}\right\}\right]<0$이므로

함수 $h(x)$ 는 구간 $[1,\infty)$에서 감소한다.

$h(1)=0$이며 문제 **【3-1】**에 의해 $n\ge 1$일 때 아래의 부등식을 얻을 수 있다.

$$-\sum_{i=1}^{n+1}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]<\int_1^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)\,dx<-\sum_{i=1}^{n}\left[\left\{\ln\left(\frac{i^2+1}{i+1}\right)\right\}\left\{\frac{i^2+2i-1}{(i+1)^2}\right\}\right]$$

따라서, $n\ge 1$일 때

$$a_n=-\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\left[\left\{\ln\left(\frac{k^2+1}{k+1}\right)\right\}\frac{k^2+2k-1}{(k+1)^2}\right]<\frac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\int_1^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)\,dx$$

이고 $n\ge 2$일 때

$$\frac{4}{n\ln n}\int_1^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)\,dx<-\frac{4}{n\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left[\left\{\ln\left(\frac{k^2+1}{k+1}\right)\right\}\frac{k^2+2k-1}{(k+1)^2}\right]=a_{n-1}$$

한편, 부분적분법에 의해 $\displaystyle\int(-\ln x)\,dx=-x\ln x+\int 1\,dx=-x(\ln x-1)+C$ 이다. (C는 적분상수)

따라서, $\displaystyle\int_1^{\frac{n^2+2n+2}{n+2}}(-\ln x)\,dx=-\frac{n^2+2n+2}{n+2}\left(\ln\frac{n^2+2n+2}{n+2}-1\right)-1$ 이다.

$b_n=-\dfrac{4}{(n+1)\ln(n+1)}\left\{\dfrac{n^2+2n+2}{n+2}\left(\ln\dfrac{n^2+2n+2}{n+2}-1\right)+1\right\}\ \ (n\ge 1)$,

$c_{n-1}=-\dfrac{4}{n\ln n}\left\{\dfrac{n^2+2n+2}{n+2}\left(\ln\dfrac{n^2+2n+2}{n+2}-1\right)+1\right\}\ \ \ (n\ge 2)$이라 하면 모든 자연수 n에 대하여

$c_n<a_n<b_n$이 성립한다.

$$\begin{aligned}\text{이때, }\lim_{n\to\infty}b_n&=(-4)\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\ln\frac{n^2+2n+2}{(n+2)(n+1)}(n+1)}{\ln(n+1)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\&=(-4)\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+2n+2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\ln\frac{n^2+2n+2}{(n+2)(n+1)}}{\ln(n+1)}+1-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\&=-4\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}c_n&=(-4)\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+1)(n+3)}\left(\frac{\ln\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+1)}(n+1)}{\ln(n+1)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\&=(-4)\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+1)(n+3)}\left(\frac{\ln\frac{(n+1)^2+2(n+1)+2}{(n+3)(n+1)}}{\ln(n+1)}+1-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right\}\\&=-4\end{aligned}$$

이다. 따라서, 수열의 극한의 대소관계에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-4$이다.