부록 4 | # 문항카드(자연계열 - 수학)

[문항카드 7]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT)전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅰ / 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	이차방정식, 연속, 미분, 정적분
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 30분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 또한, 닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$$

일 때, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이라고 한다.

(나) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(라) 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

[문항]

두 실수 a, b에 대하여, 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

조건

$0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f(x)-(1-x)^2}{x(1-x)}=a,\quad \frac{g(x)-x^2}{x(1-x)}=b$$

이다.

다음 물음에 답하시오.

【1-1】 $f(0)-g(0)$과 $f(1)-g(1)$의 값을 각각 구하시오. (20점)

【1-2】 $t=a-b$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근 중 열린구간 $(0,1)$에 속하는 근을 $h(t)$라 하자.

(1) $h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (t=0)\\ \dfrac{t-2+\sqrt{t^2+4}}{2t} & (t\neq 0)\end{cases}$

임을 보이시오. (40점)

(2) $h'(0)$의 값을 구하시오. (20점)

(3) $\int_1^4 t^2 h(t)\,dt$의 값을 구하시오. (30점)

3. 출제 의도

1. 함수의 연속의 뜻을 이해하고 함숫값을 구할 수 있는지를 평가한다.

2. (1) 이차방정식의 근을 구하고 특정 구간의 근을 구할 수 있는지를 평가한다.
   (2) 미분계수의 정의를 이해하고 이를 활용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 평가한다.
   (3) 정적분의 정의를 이해하고 치환적분법을 활용하여 정적분을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
제시문(나)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (가) 미분계수
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(다)	교육과정	[미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
	성취기준·성취수준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문(라)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다.
문항1	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - (가) 다항식의 연산 [수학] - (1) 문자와 식 - (나) 나머지정리 [수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (나) 함수의 연속
	성취기준·성취수준	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항2 (1)	교육과정	[수학] - (1) 문자와 식 - (가) 다항식의 연산 [수학] - (1) 문자와 식 - (나) 나머지정리 [수학] - (1) 문자와 식 - (마) 이차방정식과 이차함수
	성취기준·성취수준	[10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. [10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.
문항2 (2)	교육과정	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - (가) 함수의 극한 [수학Ⅱ] - (2) 미분 - (가) 미분계수
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
문항2 (3)	교육과정	[수학Ⅱ] - (3) 적분 - (가) 부정적분 [수학Ⅱ] - (3) 적분 - (나) 정적분 [미적분] - (3) 적분법 - (가) 여러 가지 적분법
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	박교식 외 19인	㈜동아출판	2020년	p20-22, p35, p55
	미적분	홍석복 외 10인	㈜지학사	2020년	p150-151, p153

5. 문항 해설

【1-1】 함수의 연속의 뜻을 이해하고 함숫값을 구하도록 함.

【1-2】
(1) 방정식의 근을 구하고 특정 구간의 근을 구하도록 함.
(2) 미분계수의 정의를 이해하고 이를 활용하여 미분계수를 구하도록 함.
(3) 정적분의 정의를 이해하고 치환적분법을 활용하여 정적분을 구하도록 함.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(x)=(1-x)^2+ax(1-x)$이고 $g(x)=x^2+bx(1-x)$임을 보이면	10
	두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 것을 이용하여 $f(0)-g(0)=1,\ f(1)-g(1)=-1$ 구하면	10
[1-2] (1)	$f(x)-g(x)=-tx^2+(t-2)x+1$임을 보이면	10
	$t=0$일 때 $h(t)=\frac{1}{2}$임을 보이면	10
	$t>0$일 때 $h(t)=\frac{t-2+\sqrt{t^2+4}}{2t}$이고 $0<h(t)<1$임을 보이면	10
	$t<0$일 때 $h(t)=\frac{t-2+\sqrt{t^2+4}}{2t}$이고 $0<h(t)<1$임을 보이면	10
[1-2] (2)	미분계수의 정의에 의해 $h'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2+\sqrt{t^2+4}}{2t^2}$임을 보이면	10
	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{-2+\sqrt{t^2+4}}{2t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{t^2+4}+2)}=\frac{1}{8}$을 구하면	10
[1-2] (3)	$\int_1^4 t^2h(t)dt=\frac{1}{2}\int_1^4\left(t^2-2t+t\sqrt{t^2+4}\right)dt$를 구하면	5
	적분의 성질과 치환적분법을 이용하여 $\int\left(t^2-2t+t\sqrt{t^2+4}\right)dt=\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}(t^2+4)^{\frac{3}{2}}+C$을 구하면	20
	$\int_1^4 t^2h(t)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}(t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=3+\frac{35}{6}\sqrt{5}$를 구하면	5

7. 예시 답안

【1-1】

$0<x<1$인 모든 실수 x에 대해서 $\frac{f(x)-(1-x)^2}{x(1-x)}=a$이고 $\frac{g(x)-x^2}{x(1-x)}=b$ 이므로

$f(x)=(1-x)^2+ax(1-x)$이고 $g(x)=x^2+bx(1-x)$이다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=1,\ f(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)=0,\ g(0)=\lim_{x\to 0+}g(x)=0,\ g(1)=\lim_{x\to 1-}g(x)=1$

이다. 그러므로 $f(0)-g(0)=1,\ f(1)-g(1)=-1$이다.

【1-2】

(1) $f(x)-g(x)=(1-x)^2+ax(1-x)-x^2-bx(1-x)=-(a-b)x^2+(a-b-2)x+1=0$이므로

$tx^2-(t-2)x-1=0$의 $0<x<1$인 근을 구한다.

(i) $t=a-b=0$일 때 x에 대한 일차방정식 $f(x)-g(x)=-2x+1=0$의 근은 $x=\frac{1}{2}$이다.

(ii) $t=a-b>0$일 때 근과 계수의 관계를 이용하여 x에 대한 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근이 구간 $(-\infty,0)$과 열린구간 $(0,1)$에서 각각 한 개씩 존재함을 보일 수 있다.

(iii) $t=a-b<0$일 때 근과 계수의 관계를 이용하여 x에 대한 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근이 열린구간 $(0,1)$과 구간 $(1,\infty)$에서 각각 한 개씩 존재함을 보일 수 있다.

그러므로 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 함수 $h(t)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (t=0)\\ \frac{t-2+\sqrt{t^2+4}}{2t} & (t\neq 0)\end{cases}$$

(2) 미분계수의 정의에 의해

$$h'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{h(t)-h(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2+\sqrt{t^2+4}}{2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{t^2+4}+2)}=\frac{1}{8}$$

(3) 정적분의 정의와 치환적분법을 이용하면

$$\int_1^4 t^2h(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_1^4\left(t^2-2t+t\sqrt{t^2+4}\right)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}(t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=3+\frac{35}{6}\sqrt{5}$$

[문항카드 8]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT)전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열1 / 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 함수의 몫의 미분법, 함수의 최대와 최소
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 35분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x_1\neq x_2$일 때,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(나) 두 점 $(a,0)$, $(0,b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

이다. 또한, 두 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{c}+\frac{y}{d}=1$의 교점과 원점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{d}-\frac{1}{b}}$$

(단, $0<a<c$이고 $0<d<b$)

(다) 점 (x_1,y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ ($a\neq 0$ 또는 $b\neq 0$) 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(라) 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(마) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 최대·최소정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 극값을 가지면

$$f(x)\text{의 극값, } f(a),\ f(b)$$

중에서 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.

[문항]

네 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

조건

모든 자연수 n에 대하여,
(ⅰ) $a_n = 2n+8,\ b_n = 5n+10,\ c_n = n+9$
(ⅱ) d_n은 $0 < d_n < c_n$인 실수이다.

자연수 n에 대하여, 좌표평면 위에 원점 O와 네 점 $\mathrm{A}_n(a_n, 0)$, $\mathrm{B}_n(b_n, 0)$, $\mathrm{C}_n(0, c_n)$, $\mathrm{D}_n(0, d_n)$이 있다. 두 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$의 교점을 E_n, 두 직선 OE_n, $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$의 교점을 F_n, 직선 $\mathrm{C}_n\mathrm{F}_n$과
x축과의 교점을 G_n이라 하자.
다음 물음에 답하시오.

【2-1】 직선 OE_n의 기울기는

$$\frac{(\boxed{\ (ㄱ)\ }n+\boxed{\ (ㄴ)\ })(n+9)d_n}{10(n+2)(n+4)(n+9-d_n)}$$

이다. (ㄱ)과 (ㄴ)에 들어갈 알맞은 자연수를 각각 구하시오. (30점)

【2-2】 $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{G}_n}}{\overline{\mathrm{OG}_n}}$의 값을 구하시오. (40점)

【2-3】 삼각형 $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1$의 넓이가 최대가 되도록 하는 d_1의 값을 구하시오. (단, $1 \le d_1 \le 9$) (50점)

3. 출제 의도

1. 두 직선의 교점과 원점을 지나는 직선의 기울기를 계산할 수 있는지를 평가한다.
2. 두 직선의 기울기 비교를 통한 관계식을 찾고 극한을 계산할 수 있는지를 평가한다.
3. 두 직선의 교점 및 점과 직선 사이의 거리를 통해 삼각형의 넓이를 함수로 찾고, 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - (다) 직선의 방정식
	성취기준·성취수준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - (다) 직선의 방정식
	성취기준·성취수준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[수학] - (2) 기하 - (다) 직선의 방정식
	성취기준·성취수준	[10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문(라)	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법
	성취기준·성취수준	[12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
제시문(마)	교육과정	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문항1	교육과정	[수학] - (2) 기하 - (다) 직선의 방정식
	성취기준·성취수준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문항2	교육과정	[수학] - (2) 기하 - (다) 직선의 방정식 [미적분] - (1) 수열의 극한 - (가) 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항3	교육과정	[미적분] - (2) 미분법 - (나) 여러 가지 미분법 [수학Ⅱ] - (2) 미분 - (다) 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10인	(주)천재교과서	2020년	p.121-p.125, p.132-p.133
	수학 Ⅱ	박교식 외 19인	㈜동아출판	2020년	p89-p92
	미적분	고성은 외 5인	㈜좋은책신사고	2020년	p15-p17, p76-77

5. 문항 해설

[2-1] 두 직선의 교점과 원점을 지나는 직선의 기울기를 계산할 수 있는지 알아보는 문제이다.

[2-2] 두 직선의 기울기 비교를 통한 관계식을 찾고 극한을 계산할 수 있는지 알아보는 문제이다.

[2-3] 두 직선의 교점 및 점과 직선 사이의 거리를 통해 삼각형의 넓이를 함수로 찾고, 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 알아보는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
2-1	제시문 (나)를 이용하여 직선 OE_n의 기울기가 $\dfrac{(b_n-a_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_nb_n}$ 임을 구한다.	10
	$\dfrac{(b_n-a_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_nb_n}=\dfrac{(3n+2)(n+9)d_n}{10(n+2)(n+4)(n+9-d_n)}$임을 이용하여 (ㄱ)=3, (ㄴ)=2를 구한다. (각 10점)	20
2-2	제시문 (나)를 이용하여 직선 OF_n의 기울기가 $\dfrac{(a_n-g_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_ng_n}$ 임을 구한다.	15
	$\dfrac{(b_n-a_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_nb_n}=\dfrac{(a_n-g_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_ng_n}$을 이용하여 $g_n=\dfrac{a_nb_n}{2b_n-a_n}=\dfrac{5(n+2)(n+4)}{4n+6}$을 구한다.	15
	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{G}_n}}{\overline{\mathrm{OG}_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n+10}=\dfrac{3}{5}$을 구한다.	10
2-3	$\mathrm{E}_1\left(\dfrac{15(10-d_1)}{15-d_1},\dfrac{5d_1}{15-d_1}\right)$을 구한다.	5
	$\overline{\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1}=\dfrac{10-d_1}{15-d_1}\sqrt{15^2+d_1^2}$을 구한다.	5
	점 $\mathrm{G}_1\left(\dfrac{15}{2},0\right)$과 직선 $\mathrm{B}_1\mathrm{D}_1$ 사이의 거리는 $\dfrac{15d_1}{2\sqrt{15^2+d_1^2}}$임을 구한다.	10
	삼각형 $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1$의 넓이를 d_1 $(1\le d_1\le 9)$에 대한 함수 $f(d_1)=\dfrac{15d_1(10-d_1)}{4(15-d_1)}$로 구한다.	10
	$f'(d_1)=\dfrac{15(d_1^2-30d_1+150)}{4(15-d_1)^2}$이고 $f'(15-5\sqrt{3})=0$을 구한다. 또한, $1<d_1<15-5\sqrt{3}$일 때, $f'(d_1)>0$이고, $15-5\sqrt{3}<d_1<9$일 때, $f'(d_1)<0$이므로	10
	f는 극댓값 $f(15-5\sqrt{3})=\dfrac{25(3-\sqrt{3})^2}{4}$을 가지고, $f(1)=\dfrac{135}{56}(<f(15-5\sqrt{3}))$, $f(9)=\dfrac{45}{8}(<f(15-5\sqrt{3}))$이므로 $d_1=15-5\sqrt{3}$일 때, 삼각형 $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1$의 넓이가 최대임을 구한다.	10

7. 예시 답안

[2-1]

제시문 (나)에 의하여 직선 OE_n의 기울기는

$\dfrac{(b_n-a_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_nb_n}=\dfrac{(3n+2)(n+9)d_n}{10(n+2)(n+4)(n+9-d_n)}$ 이다.

따라서 (ㄱ)=3, (ㄴ)=2이다.

[2-2]

점 G_n의 좌표를 $(g_n,0)$이라하면, 제시문 (나)에 의하여 직선 OF_n의 기울기는 $\dfrac{(a_n-g_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_ng_n}$이다. 직선 OE_n과 직선 OF_n의 기울기는 같으므로, $\dfrac{(b_n-a_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_nb_n}=\dfrac{(a_n-g_n)c_nd_n}{(c_n-d_n)a_ng_n}$이고

$g_n=\dfrac{a_nb_n}{2b_n-a_n}=\dfrac{5(n+2)(n+4)}{4n+6}$이다.

$\mathrm{A}_n(2n+8,0)$, $\mathrm{B}_n(5n+10,0)$, $\mathrm{G}_n\left(\dfrac{5(n+2)(n+4)}{4n+6},0\right)$이므로,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{G}_n}}{\overline{\mathrm{OG}_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n+10}=\dfrac{3}{5}$이다.

【2-3】

직선 $\mathrm{A_1C_1}$과 직선 $\mathrm{B_1D_1}$의 교점은 $\mathrm{E_1}\left(\frac{15(10-d_1)}{15-d_1}, \frac{5d_1}{15-d_1}\right)$이고, $\overline{\mathrm{D_1E_1}} = \frac{10-d_1}{15-d_1}\sqrt{15^2+d_1^2}$이다. 직선 $\mathrm{B_1D_1}$의 방정식은 $d_1x+15y-15d_1=0$이므로, 점 $\mathrm{G_1}\left(\frac{15}{2}, 0\right)$과 직선 $\mathrm{B_1D_1}$ 사이의 거리는 $\frac{15d_1}{2\sqrt{15^2+d_1^2}}$이다.

따라서, 삼각형 $\mathrm{D_1E_1G_1}$의 넓이는 $\frac{15d_1(10-d_1)}{4(15-d_1)}$이다.

$f(d_1) = \frac{15d_1(10-d_1)}{4(15-d_1)}$을 d_1 $(1 \le d_1 \le 9)$에 대한 함수라 하면, $f'(d_1) = \frac{15(d_1^2-30d_1+150)}{4(15-d_1)^2}$이고 $f'(15-5\sqrt{3})=0$이다. 또한, $1 < d_1 < 15-5\sqrt{3}$일 때, $f'(d_1)>0$이고, $15-5\sqrt{3} < d_1 < 9$일 때, $f'(d_1)<0$이므로 $d_1 = 15-5\sqrt{3}$일 때, 함수 f는 극댓값 $f(15-5\sqrt{3}) = \frac{25(3-\sqrt{3})^2}{4}$을 가진다.

$f(1) = \frac{135}{56}(<f(15-5\sqrt{3}))$이고 $f(9) = \frac{45}{8}(<f(15-5\sqrt{3}))$이므로
$d_1 = 15-5\sqrt{3}$일 때, 삼각형 $\mathrm{D_1E_1G_1}$의 넓이가 최대이다.

[문항카드 9]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열Ⅰ / 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수의 활용, 수열의 극한
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 35분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여
(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(나) 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ $(g(x) \ne 0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(다)
(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(라) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta$$

(단, θ의 단위는 라디안)

(마) $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$일 때,

$$\sin\theta \le \theta \le \tan\theta$$

(단, θ의 단위는 라디안)

(바) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

[문항]

구간 $(-1, \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{-x^2+n(n+3)x+n}{n(x+1)}$$

에 대하여, 함숫값 $f(k)$가 자연수가 되도록 하는 가장 큰 자연수 k를 a_n이라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=b_n$에서 극댓값을 가질 때, 다음 물음에 답하시오. (단, n은 자연수)

【3-1】 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. (35점)

【3-2】 두 점 $(a_n, f(a_n))$, $(b_n, f(b_n))$을 지나는 직선을 $y=g(x)$라 할 때, 닫힌구간 $[b_n, a_n]$에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립함을 보이시오. (35점)

【3-3】 중심이 $\mathrm{P}(b_n, f(b_n))$인 y축에 접하는 원 C에 대하여, 점 P와 점 $((\sqrt{3}+1)n+\sqrt{3}, 0)$을 지나는 직선과 원 C의 두 교점 중 x좌표의 값이 큰 점을 D, 곡선 $y=f(x)$와 원 C의 두 교점 중 x좌표의 값이 큰 점을 E라 하자. 두 점 P, E 사이의 곡선 $y=f(x)$의 부분, 부채꼴 PDE의 호 DE 및 선분 PD로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. (단, 부채꼴 PDE의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$보다 작다.)

(50점)

3. 출제 의도

1. 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 파악할 수 있는지를 평가한다.

2. 도함수를 활용하여 부등식의 성립 여부를 확인할 수 있는지를 평가한다.

3. 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고 이를 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학 II]-(2) 미분-(다) 도함수의 활용
	성취기준	[12수학 II 02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-(나) 여러 가지 미분법
	성취기준	[12미적 02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[수학I]-(3) 수열-(나) 수열의 합
	성취기준	[12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
제시문(라)	교육과정	[수학I]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수
	성취기준	[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
제시문(마)	교육과정	[미적분]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수
	성취기준	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
제시문(바)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-(가) 여러 가지 함수의 미분
	성취기준	[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
문항1	교육과정	[수학II]-(2) 미분-(다) 도함수의 활용 [미적분]-(2) 미분법-(나) 여러 가지 미분법 [수학I]-(3) 수열-(나) 수열의 합
	성취기준	[12수학II 02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학II 02-09]함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적 02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.
문항2	교육과정	[미적]-(2) 미분법-(다) 도함수의 활용
	성취기준	[12미적02-13]방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문항3	교육과정	[수학I]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수 [미적분]-(1) 수열의 극한-(가) 수열의 극한
	성취기준	[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	류희찬 외 10인	천재교과서	2020	70-76, 77-83, 140-146
	수학II	황선욱 외 8인	미래엔	2020	82-98
	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2020	16-20, 122-124

5. 문항 해설

[3-1] 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 파악한 후, 문제에서 요구하는 수열의 일반항과 그 합을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-2] 도함수를 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 증명할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

[3-3] 수열의 극한을 구하기 위한 부등식을 유도할 수 있는지와, 그 부등식을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점

<table>
<tr><td rowspan="4">3-1</td><td>$f'(x) = \dfrac{-(x+1)^2+(n+1)^2}{n(x+1)^2}$을 구한다.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>함수의 증감표
<table>
<tr><td>x</td><td>(-1)</td><td>$\cdots$</td><td>n</td><td>$\cdots$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\nearrow$</td><td>$n+1$</td><td>$\searrow$</td></tr>
</table>
와 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$을 구한다.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$f(x)=1$에서 $a_n = n^2+2n$을 구한다.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$\sum_{n=1}^{10} a_n = 495$를 구한다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3-2</td><td>$b_n = n$을 구한다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$g(x) = -\dfrac{1}{n+1}(x-n)+n+1$을 구한다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$l'(x) = f'(x)-g'(x) = \dfrac{-(x+1)^2+(n+1)^3}{n(n+1)(x+1)^2}$을 구한다.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>증감표
<table>
<tr><td>x</td><td>n</td><td>$\cdots$</td><td>$-1+(n+1)\sqrt{n+1}$</td><td>$\cdots$</td><td>n^2+2n</td></tr>
<tr><td>$l'(x)$</td><td>$\dfrac{1}{n+1}$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>$-\dfrac{1}{(n+1)^2}$</td></tr>
<tr><td>$l(x)$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td>0</td></tr>
</table>
을 구한다.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$l(x) = f(x)-g(x) \ge 0$에서 $f(x) \ge g(x)$임을 유도한다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3-3</td><td>원 C의 방정식 $(x-n)^2+(y-n-1)^2 = n^2$을 구한다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\pi}{12}n^2 - T_n \le S_n \le \dfrac{\pi}{12}n^2$을 유도한다.</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$\sin\theta_n = \dfrac{n}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}$, $\tan\theta_n = \dfrac{n}{n^2+n}$을 구한다.</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$\lim_{n\to\infty} sin\theta_n = \lim_{n\to\infty} tan\theta_n = 0$로부터 $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$을 구한다.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2} = \dfrac{\pi}{12}$을 구한다.</td><td>5</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

【3-1】

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리기 위하여 도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x) = \frac{-(x+1)^2+(n+1)^2}{n(x+1)^2}$$

이다.

$f'(x)=0$에서 $x=n$ 또는 $x=-n-2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$n+1$	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x \ge n$에서 감소하고 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$이므로, $f(k)$가 자연수가 되도록 하는 가장 큰 자연수를 찾기 위해서 우선 x에 대한 방정식 $f(x)=1$의 해가 자연수인지부터 살펴본다. $f(x)=1$에서 $x=n^2+2n$이고 n은 자연수이므로 n^2+2n은 자연수가 되어, $a_n = n^2+2n$이 된다. 따라서, 구하는 값은 $\sum_{n=1}^{10}(n^2+2n) = 495$이다.

【3-2】

위 **【3-1】**의 표에 의해서 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값 $n+1$을 가지므로, $b_n = n$이고 $f(b_n) = n+1$이다. $a_n = n^2+2n$이고 $f(a_n)=1$이므로 두 점 $(a_n, f(a_n))$, $(b_n, f(b_n))$을 지나는 직선은

$$g(x) = -\frac{1}{n+1}(x-n)+n+1$$

이다.

함수 $l(x) = f(x)-g(x)$로 놓으면 함수 $l(x)$의 도함수는

$$l'(x) = f'(x)-g'(x) = \frac{-(x+1)^2+(n+1)^2}{n(x+1)^2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-(x+1)^2+(n+1)^3}{n(n+1)(x+1)^2}$$

이므로, $n \le x \le n^2+2n$에서 함수 $l(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	n	$\cdots$	$-1+(n+1)\sqrt{n+1}$	$\cdots$	n^2+2n
$l'(x)$	$\dfrac{1}{n+1}$	$+$	0	$-$	$-\dfrac{1}{(n+1)^2}$
$l(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

따라서, $n \le x \le n^2+2n$에서 $l(x) = f(x)-g(x) \ge 0$이므로 $f(x) \ge g(x)$이다.

【3-3】

원 C와 직선 $y=g(x)$의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 F, 원 C와 직선 $y=n+1$의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 G라 하자. 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$보다 작은 부채꼴 PFG의 중심각과 넓이를 각각 θ_n과 T_n이라 하면 $T_n = \dfrac{1}{2}n^2\theta_n$이고

$$\frac{\pi}{12}n^2 - T_n \le S_n \le \frac{\pi}{12}n^2$$

이 성립한다. 또한,

$$\sin\theta_n = \frac{n}{\sqrt{(n^2+n)^2+n^2}}, \quad \tan\theta_n = \frac{n}{n^2+n}$$

이므로, $\lim_{n\to\infty} \sin\theta_n = \lim_{n\to\infty} \tan\theta_n = 0$이고, 제시문 (마)와 (바)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$이다. 따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\theta_n = 0$$

이므로, 부등식

$$\frac{\pi}{12} - \frac{T_n}{n^2} \le \frac{S_n}{n^2} \le \frac{\pi}{12}$$

와 제시문 (바)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{\pi}{12}$이다.

[문항카드 10]

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사
전형명		논술(AAT)전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열Ⅱ / 1번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	미분계수, 수열, 함수의 그래프, 함수의 극한
예상 소요 시간		전체 시험시간 100분 중 30분

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(나) $x=a$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고, 그 값이 모두 L이면

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

(다) 함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

(라) 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(마) 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = \alpha \quad (\alpha\text{는 실수})$$

이면

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \alpha$$

[문항]

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$과 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.