2023학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열 I 문제지

시 험 시 간	15:30 ~ 17:10 (100분)	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열 I 문제지와 자연계열 I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 3쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(3쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것 (테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개 혹은 수정테이프를 사용하거나, 두 줄을 긋고 재작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 또한, 닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$$

일 때, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이라고 한다.

(나) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α,β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(라) 함수 $f(x)$가 두 실수 a,b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

두 실수 a,b에 대하여, 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 조건
>
> $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\frac{f(x)-(1-x)^2}{x(1-x)}=a,\qquad \frac{g(x)-x^2}{x(1-x)}=b$$
>
> 이다.

다음 물음에 답하시오.

【1-1】 $f(0)-g(0)$과 $f(1)-g(1)$의 값을 각각 구하시오. (20점)

【1-2】 $t=a-b$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근 중 열린구간 $(0,1)$에 속하는 근을 $h(t)$라 하자.

(1) $h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (t=0)\\[2mm] \dfrac{t-2+\sqrt{t^2+4}}{2t} & (t\neq 0)\end{cases}$

임을 보이시오. (40점)

(2) $h'(0)$의 값을 구하시오. (20점)

(3) $\displaystyle\int_1^4 t^2h(t)\,dt$의 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x_1 \neq x_2$일 때,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(나) 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

이다. 또한, 두 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$의 교점과 원점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}}$$

(단, $0 < a < c$이고 $0 < d < b$)

(다) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$) 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(라) 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(마) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에서 극값을 가지면

$$f(x)\text{의 극값, } f(a),\ f(b)$$

중에서 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

네 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

조건
모든 자연수 n에 대하여, (Ⅰ) $a_n = 2n + 8$, $b_n = 5n + 10$, $c_n = n + 9$ (Ⅱ) d_n은 $0 < d_n < c_n$인 실수이다.

자연수 n에 대하여, 좌표평면 위에 원점 O와 네 점 $\mathrm{A}_n(a_n, 0)$, $\mathrm{B}_n(b_n, 0)$, $\mathrm{C}_n(0, c_n)$, $\mathrm{D}_n(0, d_n)$이 있다. 두 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$의 교점을 E_n, 두 직선 OE_n, $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$의 교점을 F_n, 직선 $\mathrm{C}_n\mathrm{F}_n$과 x축과의 교점을 G_n이라 하자.
다음 물음에 답하시오.

【2-1】 직선 OE_n의 기울기는

$$\frac{(\boxed{(\text{ㄱ})}\,n + \boxed{(\text{ㄴ})})(n+9)d_n}{10(n+2)(n+4)(n+9-d_n)}$$

이다. (ㄱ)과 (ㄴ)에 알맞은 자연수를 각각 구하시오. (30점)

【2-2】 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{G}_n}}{\overline{\mathrm{OG}_n}}$의 값을 구하시오. (40점)

【2-3】 삼각형 $\mathrm{D}_1\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1$의 넓이가 최대가 되도록 하는 d_1의 값을 구하시오. (단, $1 \leq d_1 \leq 9$) (50점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여
(1) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(나) 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(다)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(라) 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r^2\theta$$

(단, θ의 단위는 라디안)

(마) $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$일 때,

$$\sin\theta \le \theta \le \tan\theta$$

(단, θ의 단위는 라디안)

(바) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

구간 $(-1, \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{-x^2 + n(n+3)x + n}{n(x+1)}$$

에 대하여, 함숫값 $f(k)$가 자연수가 되도록 하는 가장 큰 자연수 k를 a_n이라 하자. 함수 $f(x)$가 $x = b_n$에서 극댓값을 가질 때, 다음 물음에 답하시오. (단, n은 자연수)

【3-1】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. (35점)

【3-2】 두 점 $(a_n, f(a_n))$, $(b_n, f(b_n))$을 지나는 직선을 $y = g(x)$라 할 때, 닫힌구간 $[b_n, a_n]$에서 부등식 $f(x) \ge g(x)$가 성립함을 보이시오. (35점)

【3-3】 중심이 $\mathrm{P}(b_n, f(b_n))$인 원 C가 y축에 접할 때, 점 P와 점 $((\sqrt{3}+1)n + \sqrt{3}, 0)$을 지나는 직선과 원 C의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 D, 곡선 $y = f(x)$와 원 C의 두 교점 중 x좌표가 큰 점을 E라 하자. 두 점 P, E 사이의 곡선 $y = f(x)$의 부분과 부채꼴 PDE의 호 DE 및 선분 PD로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

(단, 부채꼴 PDE의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$보다 작다.) (50점)