2022학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열Ⅱ 문제지와 자연계열Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, <u>반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것</u>(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) $x=a$에서 함수 $f(x)$의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고, 그 값이 모두 L이면 $\lim_{x\to a} f(x)=L$이다.

(나) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(마) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

양의 실수 a, b와 음의 실수 c, d에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} -(ax+b)^2+c & \left(x<-\frac{b}{a}\right) \\ \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+d & \left(-\frac{b}{a}\le x<1\right) \\ -(x-1)(3x-11)e^{-x+1} & (x\ge 1) \end{cases}$$

과 함수

$$g(x)=f(x)-(f\circ f)(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(ㄱ) 함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 미분가능하다. (ㄴ) $x<1$에서 함수 $g(x)$는 극대 또는 극소가 되는 양의 실수 x와 음의 실수 x가 오직 한 개씩 존재하고, 두 극값은 동일하다.

【1-1】 $b+6d$의 값을 구하시오. (10점)

【1-2】 다음 물음에 답하시오. 단, $(1.1)^3<e^2<8$이다.

(1) $x=\alpha$에서 함수 $f(x)$는 극값을 가질 때, $\alpha<f(\alpha)<\frac{11}{3}$임을 보이시오. 단, $1<\alpha<\frac{11}{3}$이다. (20점)

(2) $1<x<\frac{11}{3}$에서 함수 $g(x)$가 극값을 가지는 서로 다른 실수 x가 다섯 개 존재함을 보이시오. (20점)

【1-3】 실수 b는 등식 $b^2+pb+\frac{1021}{6}=0$을 만족시킨다. 정수 p를 구하시오. (60점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)} \quad (\text{단, } f'(y)\neq 0)$$

(나) 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $g(\alpha)=a,\ g(\beta)=b$이면

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,dx$$

(다) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$$

(라) 두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)\leq g(x)$일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$$

(마) 두 함수 $y=f(u),\ u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(바) 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여 $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\alpha \quad (\alpha\text{는 실수})$$

이면

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\alpha$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 이계도함수를 갖는 증가함수이고, $f(0)=0$이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g(x)$는 실수 전체 집합에서 정의되고 이계도함수를 갖는다. 실수 전체 집합에서 정의된 함수

$$h(x)=\int_0^x\left\{1+(g'(t))^4\right\}^{\frac{1}{4}}dt-\int_0^x\left\{1+(f'(t))^4\right\}^{\frac{1}{4}}dt$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 $h(\alpha)=0$을 만족하는 양의 실수 α에 대하여 $f(\alpha)=\alpha$임을 증명하시오. (50점)

【2-2】 $h(\beta)=0,\ h'(\beta)=0,\ h''(\beta)=-2^{\frac{9}{4}}$을 만족하는 양의 실수 β에 대하여 $f''(\beta)$의 값을 구하시오. (30점)

【2-3】 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=0$임을 보이시오. (40점)

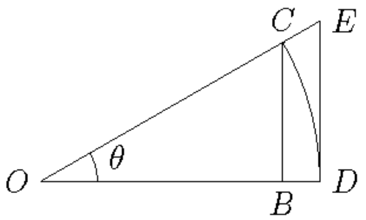
수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$과 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(나) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때, 그림으로부터 삼각형 OBC, 부채꼴 OCD, 삼각형 ODE의 넓이 사이에 다음 관계가 성립한다.



(△OBC의 넓이)≤(부채꼴 OCD의 넓이)≤(△ODE의 넓이)

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

임의의 실수 a에 대하여 y축 위의 점 $(0, a)$와 이차곡선 $P: y = x^2$ 위의 점 사이의 거리의 최솟값을 $r(a)$라고 하자.

【3-1】 다음 정적분을 구하시오. (40점)

$$\int_{-1}^{1} \{r(a)\}^2 da$$

【3-2】 원 $C_a : x^2 + (y-a)^2 = \{r(a)\}^2$과 이차곡선 P의 각 교점에서 원 C_a의 접선과 곡선 P의 접선이 일치함을 보이시오.

(30점)

【3-3】 $a > \frac{1}{2}$일 때, 원 $C_a : x^2 + (y-a)^2 = \{r(a)\}^2$과 이차곡선 P로 둘러싸인 부분 중 원의 바깥쪽 부분의 넓이를 $S(a)$라고 하자.

$$\lim_{a \to \infty} \left\{ S(a) - F\left(\sqrt{a - \frac{1}{2}} \right) \right\} = 0$$

을 만족시키는 삼차다항식 $F(x)$를 구하시오. (50점)

2022학년도 논술(AAT) 모의고사(자연계열Ⅱ) 채점 기준 및 예시 답안

자연계열 Ⅱ 1번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$a+b$의 값 또는 미분값 $-(-3x^2+20x-25)e^{-x+1}\|_{x=1}$을 정확히 구하면	5점
	$b+6d$의 값을 정확히 구하면	5점
2-1	부등식 $\frac{5}{3} < f(\frac{5}{3})$을 정확히 보이면	10점
	부등식 $f(\frac{5}{3}) < \frac{11}{3}$ 을 정확히 보이면	10점
2-2	함수값 y_1, y_2에 대하여 각각 두 개씩의 실수 x $(\neq \frac{5}{3})$가 존재함을 보이거나 함수값이 y_3인 x가 존재하지 않음 설명하면	10점
	모두 다섯 개 점이 존재함을 설명하면	10점
3	$f(t)=f(-\frac{b}{a})$ 임을 확인하면	40점
	p를 정확히 구하면	20점

2. 예시 답안

【1-1】 $x=1$에서 함수 $f(x)$는 미분가능 하므로,

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+d=0 \Rightarrow d=-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\ ,\ a+b=-(-3x^2+20x-25)e^{-x+1}|_{x=1}=8$$

$$\therefore b+6d=(8-a)+(-2a-3b)=-16.$$

【1-2】

(1) $(-(x-1)(3x-11)e^{-x+1})'=-(3x-5)(x-5)e^{-x+1}$ 이므로 $\alpha=\frac{5}{3}$.

$$\therefore (\frac{12}{11})^3 < (\frac{11}{10})^3 < e^2 < 2^3 < (\frac{12}{5})^3 \Rightarrow\ (\frac{12}{11})^3 < e^2 < (\frac{12}{5})^3 \Leftrightarrow \frac{5}{3} < f(\frac{5}{3}) < \frac{11}{3}\ .$$

(2) 조건으로부터 $x<0$이면, $f(x)<0$이다. $g'(x)=(1-f'(f(x)))f'(x)$ $\Rightarrow f'(f(x))=1$ 또는 $f'(x)=0$ 로부터 $f(x)=y_1, y_2, y_3$, $f'(y_i)=1$, $0<y_1<1$, $1<y_2<\frac{5}{3}$, $5<y_3$인 x와 $x=\frac{5}{3}$에서 극대 또는 극소가 된다. 함수값 y_1, y_2에 대하여 각각 두 개씩의 실수 x $(\neq\frac{5}{3})$가 존재 하지만,

$f(\frac{5}{3}) < \frac{11}{3}$ 이므로 함수값이 y_3인 x는 존재하지 않는다. 그러므로, 5개 존재한다.

【1-3】 $g'(x) = (1 - f'(f(x)))f'(x)$ 로부터 $x = -\frac{b}{a}$ 에서 함수 $g(x)$는 극값을 가지고 조건으로부터 $x = t, t \in (0,1)$ 에서 유일한 극값을 갖는다. 그런데, $f'(x) \neq 0, 0 < x < 1$ 이므로, $1 - f'(f(t)) = 0$.

① $f(t) < f(-\frac{b}{a})$ 이면 $f(t) = f(c)$, $c \in (-\infty, -\frac{b}{a})$ 인 c가 존재하여 조건에 모순이다.

② $f(t) > f(-\frac{b}{a})$ 이라 하자. 조건으로부터 $g(t) = g(-\frac{b}{a}) \Rightarrow \dfrac{f(f(t)) - f(f(-\frac{b}{a}))}{f(t) - f(-\frac{b}{a})} = 1$ 이므로 평균값 정리에 의해 $f'(s) = 1, s \in (f(-\frac{b}{a}), f(t))$ 인 s가 존재한다. 사잇값 정리에 의해 $s = f(s')$, $s' \in (0,t)$인 s'이 존재한다. 이는 조건에 모순이다.

①과 ②로부터, $f(t) = f(-\frac{b}{a}) \Rightarrow 2a(af(-\frac{b}{a}) + b) + 1 = 0 \Rightarrow 2a(ac + b) + 1 = 0.$

그리고, $x = -\frac{b}{a}$ 에서 함수 $f(x)$는 연속이므로, $c = -\frac{b^3}{3a^2} + \frac{b^3}{2a^2} + d$.

두 식을 $a + b = 8, d = -\frac{1}{6}b - \frac{8}{3}$ 과 연립하면, b에 대한 이차 방정식 $b^2 - 40b + \frac{1021}{6} = 0$. $p = -40$.

자연계열 Ⅱ 2번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$h(x)=\int_{f(x)}^{x}\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt$ 를 유도하면	30점
	$f(\alpha)=\alpha$ 임을 보이면	20점
2	$f'(\beta)=g'(\beta)=1$ 을 구하면	10점
	$f''(\beta)=4$ 를 구하면	20점
3	$g'(t)\le\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}\le 1+g'(t)$ 를 유도하면	10점
	$0\le\lvert h(x)-g(x)+x\rvert\le\lvert x-f(x)\rvert$를 유도하면	10점
	$\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=0$ 임을 보이면	20점

2. 예시 답안

【2-1】

두번째 항인 $\int_0^x\{1+(f'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt$ 에 대해 치환적분 $t=g(s)$를 적용하자. $f(x)$가 증가함수이므로 역함수 $g(x)$도 증가함수이고, 따라서 $g'(x)>0$이다. 또한, $f(0)=0$ 이므로,

$$\int_0^x\{1+(f'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt=\int_0^{f(x)}\left\{1+\left(\frac{1}{g'(s)}\right)^4\right\}^{\frac{1}{4}}g'(s)\,ds=\int_0^{f(x)}\{1+(g'(s))^4\}^{\frac{1}{4}}ds$$

를 얻는다. 따라서,

$$h(x)=\int_0^x\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt-\int_0^{f(x)}\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt=\int_{f(x)}^x\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt$$

임을 알 수 있다. $h(\alpha)=0$을 만족하는 양의 실수 α에 대하여, 만약 $f(\alpha)<\alpha$이면,

$$h(\alpha)=\int_{f(\alpha)}^{\alpha}\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt\ \ge\int_{f(\alpha)}^{\alpha}1\,dt=\alpha-f(\alpha)>0$$

이므로 모순이다. 만약 $f(\alpha)>\alpha$이면,

$$h(\alpha)=-\int_{\alpha}^{f(\alpha)}\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt\le-\int_{\alpha}^{f(\alpha)}1\,dt=-(f(\alpha)-\alpha)<0$$

이므로 모순이다. 따라서 $f(\alpha)=\alpha$임을 알 수 있다.

【2-2】

$h(x)=\int_0^x\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt-\int_0^x\{1+(f'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt$ 이므로,

$h'(x)=\{1+(g'(x))^4\}^{\frac{1}{4}}-\{1+(f'(x))^4\}^{\frac{1}{4}}$ 이고,

$$h''(x)=\{1+(g'(x))^4\}^{-\frac{3}{4}}(g'(x))^3g''(x)-\{1+(f'(x))^4\}^{-\frac{3}{4}}(f'(x))^3f''(x)$$

이다. 우선, $h(\beta)=0$ 으로부터 $f(\beta)=\beta=g(\beta)$ 임을 알 수 있다.

$h'(\beta)=\{1+(g'(\beta))^4\}^{\frac{1}{4}}-\{1+(f'(\beta))^4\}^{\frac{1}{4}}=0$ 으로부터 $f'(\beta)=g'(\beta)$를 알 수 있고, 역함수의 도함수 성질로부터 $g'(\beta)=\dfrac{1}{f'(\beta)}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $f'(\beta)=g'(\beta)=1$ 을 얻는다. 또한, $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 모든 실수 x에 대해 $f(g(x))=x$ 가 성립하고, 양변의 이계도함수를 계산하면 $f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)=0$ 를 얻는다. 여기에 $x=\beta$ 를 대입하면 $g''(\beta)=-f''(\beta)$ 를 얻을 수 있다. 한편 $h''(\beta)=-2^{\frac{9}{4}}$ 이므로,

$$-2^{\frac{9}{4}}=h''(\beta)=\{1+(g'(\beta))^4\}^{-\frac{3}{4}}(g'(\beta))^3g''(\beta)-\{1+(f'(\beta))^4\}^{-\frac{3}{4}}(f'(\beta))^3f''(\beta)=-2\times2^{-\frac{3}{4}}f''(\beta)$$

임을 알 수 있다. 이로부터 $f''(\beta)=4$ 를 얻는다.

【2-3】

위에서 구한 식 $h(x)=\int_{f(x)}^x\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt$ 를 이용하자. 임의의 실수 t에 대해 $g'(t)>0$ 이므로,

$$(g'(t))^4\le1+(g'(t))^4\le(1+g'(t))^4$$

가 성립한다.

따라서 임의의 실수 t에 대해 $g'(t)\le\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}\le1+g'(t)$ 가 성립하고, 이로부터 $x\ge f(x)$인 경우

$$\int_{f(x)}^x g'(t)\,dt\le h(x)=\int_{f(x)}^x\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt\le\int_{f(x)}^x(1+g'(t))\,dt$$

이다. 한편,

$$\int_{f(x)}^x g'(t)\,dt=g(x)-g(f(x))=g(x)-x$$

$$\int_{f(x)}^x(1+g'(t))\,dt=(x-f(x))+(g(x)-g(f(x)))=g(x)-f(x)$$

이므로, 부등식

$$0\le h(x)-g(x)+x\le x-f(x)\ \cdots\ (*)$$

가 성립한다. $x<f(x)$인 경우는

$$-\int_x^{f(x)}(1+g'(t))\,dt\le h(x)=-\int_x^{f(x)}\{1+(g'(t))^4\}^{\frac{1}{4}}dt\le-\int_x^{f(x)}g'(t)\,dt$$

로부터, 부등식

$$x-f(x)\le h(x)-g(x)+x\le0\ \cdots\ (**)$$

가 성립한다. 그러므로, 부등식 (*), (**)로부터 임의의 양의 실수 x에 대해

$$0 \le \left| \frac{h(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} + 1 \right| \le \left| 1 - \frac{f(x)}{x} \right|$$

를 얻고, 문제 조건의 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ 로부터 $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{h(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} + 1 \right) = 0$ 임을 알 수 있다.

한편, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}\, x = \infty$ 를 이용하면 $\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{s \to \infty} \frac{s}{f(s)} = 1$ 이므로,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 \right) = 0$$

임을 알 수 있다.

자연계열 Ⅱ 3번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	점 $(0,a)$에서 곡선 $y=x^2$ 의 한 점까지의 거리를 함수로 표현했으면	10점
	$a<\frac{1}{2}$, $a\geq\frac{1}{2}$로 경우를 나누었으면	15점
	각 경우에 대해 $r(a)$를 올바르게 구하고 적분값을 계산하였으면	15점
2	$a<\frac{1}{2}$, $a\geq\frac{1}{2}$로 경우를 나누었으면	5점
	$a<\frac{1}{2}$일 때 접선이 일치함을 보였으면	10점
	$a\geq\frac{1}{2}$일 때 접선이 일치함을 보였으면	15점
3	주어진 영역을 올바르게 표현하였으면(그림, 설명 등)	5점
	관련된 영역(곡선 P와 접점을 잇는 선분사이의 영역, 직각삼각형, 반원 등)의 면적을 계산하였으면	10점
	부채꼴에 대해 부등식을 올바로 사용하였으면	10점
	$F(X)$를 구하였으면	10점
	$\lim_{a\to\infty}\left\{S(a)-F\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)\right\}=0$ 임을 보였으면	15점

2. 예시 답안

【3-1】 점 $(0,a)$에서 곡선 P위의 점 (x,x^2) 까지의 거리 $\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}$가 최솟값 $r(a)$일 때, 함수 $f(x)=x^2+(x^2-a)^2=x^4+(1-2a)x^2+a^2$ 가 최솟값 $\{r(a)\}^2$을 가진다.

$a\geq\frac{1}{2}$이면 $x^2=-\frac{1-2a}{2}=a-\frac{1}{2}\geq 0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}$에서 $f(x)$는 최솟값 $a-\frac{1}{4}$을 갖고,

$a<\frac{1}{2}$이면 $x=0$에서 $f(x)$는 최솟값 a^2을 가진다. 따라서,

$$r(a)=\begin{cases}\sqrt{a-\frac{1}{4}} & \left(a\geq\frac{1}{2}\right)\\ |a| & \left(a<\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

이고, 주어진 정적분은

$$\int_{-1}^{1}\{r(a)\}^2 da = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} a^2 da + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{a-\frac{1}{4}\right\}da = \frac{5}{8}$$

【3-2】 원 C_a와 곡선 P와의 교점을 (x_0, y_0)라 두면, $y_0 = x_0^2 \geq 0$이다.

$a < \frac{1}{2}$이면 원 C_a의 방정식은 $x^2+(y-a)^2 = r(a)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2ay = 0$이고, $x^2 = y$ 를 대입하면, $y_0^2+(1-2a)y_0 = 0$. 따라서 $y_0 = 0$ 이거나 $y_0 = 2a-1 < 0$ 그런데 $y_0 = x_0^2 \geq 0$ 이므로, 유일한 교점은 $(x_0, y_0) = (0,0)$이다. 이때 원 C_a와 곡선 P는 원점 $(0,0)$에서 x축에 접하므로, 접선의 방정식은 둘 다 $y=0$으로 일치한다.

$a \geq \frac{1}{2}$이면 원 C_a의 방정식은 $x^2+(y-a)^2 = r(a)^2 = a-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2-2ay+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ 이고, $x^2 = y$ 를 대입하면, $y_0+y_0^2-2ay+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y_0^2+(1-2a)y+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = a-\frac{1}{2}$에서 중근을 갖는다.

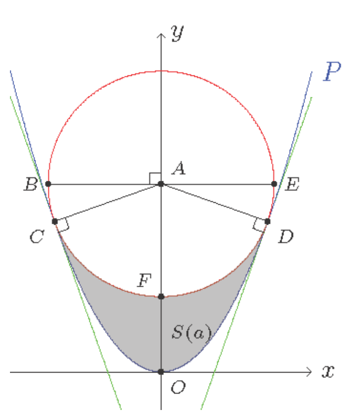
따라서 교점은 $(x_0, y_0) = \left(\pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}, a-\frac{1}{2}\right)$각 교점에서 원 C_a의 접선과 곡선 P의 접선의 방정식은

$x_0(x-x_0)+(y_0-a)(y-y_0) = \pm\sqrt{a-\frac{1}{2}}\left(x \mp \sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)+\left(a-\frac{1}{2}-a\right)\left(y-a+\frac{1}{2}\right) = 0$ 과

$y-y_0 = 2x_0(x-x_0) \Leftrightarrow y-a+\frac{1}{2} = \pm 2\sqrt{a-\frac{1}{2}}\left(x \mp \sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)$이고, 이를 정리하면 두 접선의 방정식은

$y = \pm 2\sqrt{a-\frac{1}{2}}\,x-\left(a-\frac{1}{2}\right)$ 으로 일치한다.

【3-3】



왼쪽 그림에서, 주어진 영역은 곡선 P와 원호 CFD로 둘러쌓인 영역CODF가 된다. 곡선COD와 선분CD로 둘러싸인 영역을 영역COD라고 나타내면,

$S(a)$ = (영역 COD의 넓이) + (삼각형 ACD의 넓이)
+ (부채꼴 ABC의 넓이) + (부채꼴 ADE의 넓이)
− (반원 ABFE의 넓이)

$$(\text{영역 COD의 넓이}) = 2\sqrt{a-\frac{1}{2}}\left(a-\frac{1}{2}\right) - \int_{-\sqrt{a-\frac{1}{2}}}^{\sqrt{a-\frac{1}{2}}} x^2 dx = \frac{4}{3}\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$(\text{삼각형 ACD의 넓이}) = 2\sqrt{a-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a-\frac{1}{2}}$$

$$(\text{반원 ABFE의 넓이}) = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{a-\frac{1}{4}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{\pi}{8}$$

(부채꼴 ABC의 넓이) = (부채꼴 ADE의 넓이) 이고, 이 부채꼴에 대해 (나)에 주어진 부등식을 이용하면,

$$\frac{1}{4}\sqrt{a-\frac{1}{2}} \le (\text{부채꼴 ABC의 넓이}) \le \sqrt{a-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a-\frac{1}{4}}}{\sqrt{a-\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{a-\frac{1}{2}} + \frac{1}{16\sqrt{a-\frac{1}{2}}}$$

이제 $F(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{\pi}{2}x^2+x-\frac{\pi}{8}$ 라 두면, 아래 부등식을 얻는다.

$$F\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right) \le S(a) \le F\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{8\sqrt{a-\frac{1}{2}}} \iff 0 \le S(a) - F\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right) \le \frac{1}{8\sqrt{a-\frac{1}{2}}}$$

여기서 $\lim_{a\to\infty}\frac{1}{8\sqrt{a-\frac{1}{2}}}=0$ 이므로 함수의 극한의 대소관계에 의해, $\lim_{a\to\infty}\left\{S(a)-F\left(\sqrt{a-\frac{1}{2}}\right)\right\}=.0$