2022학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 I 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 "0"점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$과 $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(나) 중심이 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

(라) 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

양의 실수 t에 대하여 중심이 $\mathrm{C}(f(t), g(t))$인 원 R는 점 $\mathrm{P}(t, t^2)$에서 곡선 $y = x^2$과 접하고 동시에 x축과 접한다. 점 P에서 x축에 내린 수선과 원 R가 만나는 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라 하고 $\angle\mathrm{PCQ}$를 θ라 하자. 단, $f(t) > 0$, $g(t) > 0$이다.

【1-1】 $\displaystyle\lim_{t \to 0+} \frac{f(t)g(t)}{t^3}$의 값을 구하시오. (50점)

【1-2】 $t = 1$일 때, $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$의 값을 구하시오. (30점)

【1-3】 점 $\mathrm{A}(f(t), 0)$에 대하여 곡선 $y = x^2$과 x축 및 부채꼴 CPA의 호 AP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, $\displaystyle\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)}{t^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \angle\mathrm{PCA} < \pi$) (30점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.
(ii) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(나) 함수 $f(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(다) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에서
(i) $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
(ii) $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

최고차항의 계수가 3인 사차함수 $f(x)$와 양의 실수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \begin{cases} -af(x)+(a+b) & (x<5) \\ bf(x) & (x \geq 5) \end{cases}$$

는 $x=5$에서 미분가능하다.

실수 t에 대하여 함수 $k(x) = |t-g(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 $h(t)$라 하면

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t = t_1, t_2) \\ 1 & (t \neq t_1, t_2) \end{cases}$$

이다. 단, $t_1 < t_2$이다.

【2-1】 $f(5)$와 $f'(5)$를 구하시오. (30점)

【2-2】 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이시오. (40점)

【2-3】 $a=2$, $b=3$이고 $t_1=3$, $t_2=6$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 모든 교점의 x좌표들의 합을 구하시오. (50점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

(나) 좌표평면 위의 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(다) 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의될 때, 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A_n(a_{2n-1}, 0)$, $B_n(0, a_{2n})$에 대하여 삼각형 OA_nB_n의 넓이를 $S(n)$이라 하자. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=b_nx^n$과 선분 A_nB_n의 교점을 P_n이라 하자. 곡선 $y=b_nx^n$과 x축 및 선분 A_nP_n으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{n+1}S(n)$일 때, 다음 물음에 답하시오. 단, $b_n>0$이다.

【3-1】 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$이 성립함을 (다)를 이용하여 증명하시오. (30점)

【3-2】 $b_n=c_n\frac{a_{2n}}{(a_{2n-1})^n}$을 만족시키는 c_n을 구하시오. (50점)

【3-3】 선분 A_8B_8 위의 한 점 Q에 대하여 선분 QP_9가 사각형 $A_8A_9B_9B_8$의 넓이를 이등분할 때, 점 Q의 x좌표를 구하시오. (40점)

2022학년도 논술(AAT) 모의고사(자연계열Ⅰ) 채점 기준 및 예시 답안

자연계열 Ⅰ 1번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$(t-f(a))^2+(t^2-g(t))^2=g(t)^2$식을 구하면	10점
	$2t\dfrac{g(t)-t^2}{f(t)-t} = -1$을 구하면	10점
	$g(t)=\dfrac{1}{4}\sqrt{4t^2+1}\left(\sqrt{4t^2+1}-1\right)$을 구하면	10점
	$f(t)=\dfrac{t}{2}\left(\sqrt{4t^2+1}+1\right)$을 구하면	10점
	$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\dfrac{f(t)g(t)}{t^3}=\dfrac{1}{2}$을 구하면	10점
2	$g(t)+g(t)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=t^2$임을 보이면	15점
	$\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{d}{dt}(4t^2+1)=8t$ 이고 $t=1$일 때 값이 8임을 구하면	15점
3	$S(t)=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{1}{2}(t^2+g(t))(f(t)-t)-\dfrac{g(t)^2}{4}(\pi+\theta)$임을 보이면	10점
	$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\dfrac{g(t)}{t^2}=\dfrac{1}{2}$임을 구하면	5점
	$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\dfrac{f(t)}{t}=1$임을 구하면	5점
	$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\dfrac{S(t)}{t^3}=\dfrac{1}{3}$임을 구하면	10점

2. 예시 답안

【1-1】 원 R는 곡선 $y=x^2$과 x축에 동시에 접하기 때문에 원 R는 방정식

$$(x-f(t))^2+(y-g(t))^2=g(t)^2$$

을 만족시킨다. 점 $\mathrm{P}(t,t^2)$은 원 위에 있기 때문에

$$(t-f(t))^2+(t^2-g(t))^2=g(t)^2$$

을 만족시키고 선분 $\overline{\mathrm{PC}}$는 점 $\mathrm{P}(t,t^2)$에서의 곡선 $y=x^2$의 접선과 수직이기 때문에

$$2t\frac{g(t)-t^2}{f(t)-t} = -1$$

을 만족시킨다. 따라서

$$g(t)=\frac{1}{4}\sqrt{4t^2+1}\left(\sqrt{4t^2+1}-1\right),$$

$$f(t)=\frac{t}{2}\left(\sqrt{4t^2+1}+1\right)$$

이고 $f(t)g(t)=\dfrac{t^3}{2}\sqrt{4t^2+1}$ 이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)g(t)}{t^3}=\frac{1}{2}$$

이다.

【1-2】 점 $\mathrm{P}(t,t^2)$의 y축 좌표는 원 R의 반지름과 $g(t)\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$의 합이기 때문에

$$b+b\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=t^2$$

을 만족시킨다. 따라서

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{d}{dt}(4t^2+1)=8t$$

이고 $t=1$일 때 값은 8이다.

【1-3】 넓이S는 곡선 $y=x^2$과 x 축 및 점 P와 점 $\mathrm{B}(t,0)$을 연결하는 선분으로 둘러싸인 영역의 넓이와 사다리꼴 PBAC의 넓이에 부채꼴 CPA의 넓이를 뺀 값이다. 따라서 넓이 $S(t)$는

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^t x^2dx+\frac{1}{2}(t^2+g(t))(f(t)-t)-\frac{g(t)^2}{4}(\pi+\theta)\\&=\frac{t^3}{3}+\frac{1}{2}(t^2+g(t))(f(t)-t)-\frac{g(t)^2}{4}(\pi+\theta)\end{aligned}$$

이다.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{4t^2+1}\left(\sqrt{4t^2+1}-1\right)}{4t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{4t^2+1}}{\left(\sqrt{4t^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2}\left(\sqrt{4t^2+1}+1\right)=1,$$

$$\pi\le\pi+\theta\le 2\pi$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^3}&=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{g(t)}{t^2}\right)\left(\frac{f(t)}{t}-1\right)-\frac{g(t)^2}{4t^3}(\pi+\theta)\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)(1-1)=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이다.

자연계열 I 2번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
2-1	$-af(5)+(a+b)=bf(5)$임을 보이고 $f(5)=1$임을 보이면	15점
	$-af'(5)=bf'(5)$임을 보이고 $f'(5)=0$임을 보이면	15점
2-2	$g(x)$가 증가함수임을 증명하면	10점
	$g'(x)=0$가 서로 다른 두 실근을 가짐을 증명하면	10점
	$f'(x)=0$가 $x=p$ $(p\neq 5)$인 중근을 가짐을 증명하면	20점
2-3	$f(x)-f(p)=(x-p)^3(3x+p-20)$을 보이면	10점
	$f(p)=1$ 임을 보이면	10점
	$p<5$이면 $f(x)$가 존재하지 않음을 보이면	10점
	$f(x)=3(x-6)^3\left(x-\frac{14}{3}\right)+2$임을 보이면	10점
	$x=6$과 $x=\frac{14}{3}$임을 보이고 그 합을 구하면	10점

2. 예시 답안

【2-1】

함수 $g(x)$가 $x=5$에서 미분가능하고 연속이므로 다음이 성립한다.

$$-af(5)+(a+b)=bf(5),\quad -af'(5)=bf'(5)$$

그러므로 $a+b>0$이므로 $f(5)=1$, $f'(5)=0$이다.

【2-2】

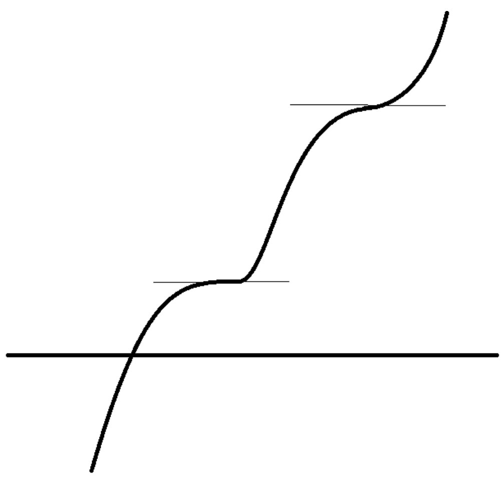
$y=|t-g(x)|=|g(x)-t|$는 $y=g(x)$를 $y=t$의 윗부분은 그대로 $y=t$의 아랫부분은 $y=t$에 대하여 대칭시킨 함수이다.

함수 $g(x)$에 대해서 다음 명제가 참임을 보이자.

① 모든 x에 대하여 $g'(x) \geq 0$이다. ② $g'(x)=0$는 오직 2개의 실근을 가진다.

함수 $f(x)$의 최고차항 계수가 양수이므로 $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ 이고 $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ 이다.

만일 어떤 $x=m$에서 $g'(x)<0$이면 $y=g(x)$와 직선 $y=g(m)$이 만나는 교점이 3개 이상이다. 즉, $t=g(m)$에서 $h(t) \geq 3$이므로 $h(t)$의 함숫값이 1이하인 조건에 모순이다. 그러므로 ①이 성립한다. $t=t_1$와 $t=t_2$에서 $h(t)=0$이고 두 점을 제외한 모든 점에서 $h(t)=1$를 만족하기 위해서는 ②를 만족해야 한다. 그때 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.



$g(x)$의 개형에 따라 $g'(x)=0$는 오직 2개의 서로 다른 실근인 해를 가진다.

$g'(5)=bf'(5)=0$이므로 $x=5$는 $g'(x)=0$의 해이다. $x=5$가 아닌 다른 해를 p라고 하자. 그러면 (i) $p<5$ 와 (ii) $p>5$인 두 가지 경우가 존재한다.

(i) $p<5$인 경우

$g'(p)=-af'(p)=0$이고 다음이 성립한다.

x	$\cdots$	$x=p$	$\cdots$	$x=5$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	-	0	+

그러므로 $x=p$는 $f'(x)=0$의 중근이다.

(ii) $p>5$인 경우

$g'(p)=bf'(p)=0$이고 다음이 성립한다.

x	$\cdots$	$x=5$	$\cdots$	$x=p$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	+

그러므로 $x=p$는 $f'(x)=0$의 중근이다.

(i)와 (ii)에 의해서 $f'(x)=0$의 해는 $x=5$, $x=p \neq 5$(중근)이다.

【2-3】

문제 2-2 결과에 의해서 $f'(x)=0$는 5와 p(중근)인 해를 가진다. 그러므로 $f'(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12(x-p)^2(x-5) \\ &= 12(x-p)^2(x-p+p-5) \\ &= 12(x-p)^3+12(p-5)(x-p)^2 \end{aligned}$$

이것을 적분하면 $f(x)=3(x-p)^4+4(p-5)(x-p)^3+C$ 이다. $x=p$를 대입하면 $C=f(p)$이다. 그러므로 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x)=3(x-p)^4+4(p-5)(x-p)^3+f(p)$$

즉, $f(x)-f(p)=(x-p)^3(3x+p-20)$이다. $x=5$를 양변에 대입하면 다음이 성립한다.

$f(5)-f(p)=-(5-p)^4$--------------------------------(*)

$f(p)$를 구하기 위해서 2가지 경우를 생각해보자.

① $p<5$인 경우

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t \le 3) \\ 0 & (t=3) \\ 1 & (3<t<6) \\ 0 & (t=6) \\ 1 & (t>6) \end{cases}$$ --------------------------(**)

이므로 $g(p)=-2f(p)+5=3$ $g(5)=3f(5)=6$이므로 $f(p)=1$, $f(5)=2$이다. 하지만 문제 2-1에 의해 $f(5)=1$이므로 조건을 만족하는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

② $5<p$인 경우

(**)에 의해서 $g(p)=3f(p)=6$, $g(5)=3f(5)=3$ 이므로 $f(p)=2$, $f(5)=1$이다. (*)에 대입 후 $5<p$이므로 $5-p=-1$이다. 즉, $p=6$이다. 그러므로 $f(x)=3(x-6)^3\left(x-\dfrac{14}{3}\right)+2$이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표는 $x=6$과 $x=\dfrac{14}{3}$이고, 그 합은 $\dfrac{32}{3}$이다.

자연계열 I 3번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$n=1$인 경우, $a_1=1=(\frac{1}{2})^0=\sum_{i=1}^{1}(\frac{1}{2})^{i-1}$이 성립함을 보이면	10점
	$n=k$일 때 $a_{2k-1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$라 가정하면	10점
	$n=k+1$인 경우에도 성립함을 보이면	10점
2	$\int_0^{\alpha_n} b_n x^n\,dx=\frac{1}{n+1}b_n(\alpha_n)^{n+1}$이므로 곡선 $y=b_nx^n$과 x축 및 선분 P_nC_n으로 둘러싸인 영역의 넓이는 사각형 $OC_nP_nD_n$ 넓이의 $\frac{1}{n+1}$임을 보이면	20점
	삼각형 $C_nA_nP_n$과 삼각형 $D_nP_nB_n$의 넓이의 비가 $1:n$임을 보이면	10점
	$c_n=\frac{(1+\sqrt{n})^{n-1}}{(\sqrt{n})^n}$을 구하면	20점
3	사각형 $A_8A_9P_9Q$의 넓이는 $-\frac{3(a+2)(a-2)}{16}$임을 구하면	20점
	$-\frac{3(a+2)(a-2)}{32}=-\frac{(a-2)(2a+3)}{8a}q$임을 구하면	10점
	Q의 x좌표가 $\frac{130305}{152576}$임을 보이면	10점

2. 예시 답안

【3-1】 $n=1$인 경우, $a_1=1=(\frac{1}{2})^0=\sum_{i=1}^{1}(\frac{1}{2})^{i-1}$이 성립한다. $n=k$일 때 $a_{2k-1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$라 가정하자.

수열의 규칙으로부터 $a_{2(k+1)-1}=a_{2k+1}=\frac{1}{2}a_{2k}=\frac{1}{2}(a_{2k-1}+2)=\frac{1}{2}a_{2k-1}+1$을 찾을 수 있으며, 가정에 의해 $\frac{1}{2}a_{2k-1}+1=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k}(\frac{1}{2})^{i-1})+1=\sum_{i=1}^{k+1}(\frac{1}{2})^{i-1}$이 되어 $n=k+1$인 경우에도 성립한다. 수학적 귀납법에 의해 $a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

【3-2】 점 P_n에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 점 $C_n(\alpha_n,0)$, 점 $D_n(\beta_n,0)$이라 하자. $\beta_n=b_n(\alpha_n)^n$이므로 사각형 $OC_nP_nD_n$의 넓이는 $\alpha_n\beta_n=b_n(\alpha_n)^{n+1}$이다.

$\int_0^{\alpha_n} b_n x^n \, dx = \frac{1}{n+1} b_n (\alpha_n)^{n+1}$이므로 곡선 $y = b_n x^n$과 x축 및 선분 $P_n C_n$으로 둘러싸인 영역의 넓이는 사각형 $OC_n P_n D_n$ 넓이의 $\frac{1}{n+1}$이다.
즉, 삼각형 $C_n A_n P_n$과 삼각형 $D_n P_n B_n$의 넓이의 비는 $1:n$이 되어야한다. 두 삼각형은 닮음이므로 닮음비는 $1:\sqrt{n}$이고, $\alpha_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} a_{2n-1}$, $\beta_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} a_{2n}$이다.

$\beta_n = b_n (\alpha_n)^n$이므로 $b_n = \frac{(1+\sqrt{n})^{n-1}}{(\sqrt{n})^n} \frac{a_{2n}}{(a_{2n-1})^n}$이고, $c_n = \frac{(1+\sqrt{n})^{n-1}}{(\sqrt{n})^n}$이다.

【3-3】 점 A_8의 x좌표를 a라 하면 수열의 규칙성에 의해 $B_8(0, a+2), A_9(\frac{1}{2}a+1, 0), B_9(0, \frac{1}{2}a+3)$을 구할 수 있다. 점 P_9는 선분 A_9B_9를 $1:3$으로 내분하는 점이므로 $(\frac{3}{8}a+\frac{3}{4}, \frac{1}{8}a+\frac{3}{4})$이다. 점 Q의 x좌표를 q라하고, Q에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라하자. 점 P_9에서 x축에 내린 수선의 발을 H_3라 하자.

두 점 A_8과 B_8을 지나는 직선의 방정식이 $y = -\frac{a+2}{a}x + a + 2$ 이므로, $Q(q, -\frac{a+2}{a}q + a + 2)$, $H_1(q,0)$, $H_2(0, -\frac{a+2}{a}q + a + 2)$임을 알 수 있다.

(사각형 $A_8A_9B_9B_8$의 넓이) = (삼각형 OA_9B_9의 넓이) - (삼각형 OA_8B_8의 넓이) = $-\frac{3(a+2)(a-2)}{8}$이므로 사각형 $A_8A_9P_9Q$의 넓이는 $-\frac{3(a+2)(a-2)}{16}$이다.
한편, (사각형 $A_8A_9P_9Q$의 넓이) = (삼각형 $H_3A_9P_9$의 넓이) + (사각형 $H_1H_3P_9Q$의 넓이) - (삼각형 H_1A_8Q의 넓이) 이므로 $-\frac{3(a+2)(a-2)}{32} = -\frac{(a-2)(2a+3)}{8a}q$을 얻을 수 있다. 즉, 점 Q의 x좌표는 $\frac{3a(a+2)}{4(2a+3)}$이다. $a = \sum_{i=1}^{8} (\frac{1}{2})^{i-1} = 2 - (\frac{1}{2})^7$이므로 $\frac{3a(a+2)}{4(2a+3)} = \frac{130305}{152576}$이다.