[문항카드 1]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열II / 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분
	핵심개념 및 용어	합성함수의 미분법, 함수의 극값
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 30분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(나) 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$이면

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,dx$$

(다) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$,$g(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[문항]

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $\left\{f\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}^2+\left\{f\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}^2=1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)=3g(x)-16\{g(x)\}^3$

(3) 열린구간 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$에서 $-\frac{1}{2}<g(x)<0$

(4) $f\left(\frac{5}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(0)=0$

【1-1】 모든 정수 n에 대하여 $|f'(n)|=|f'(0)|$이 성립함을 증명하시오. (단, $f(0)\neq 0$) (20점)

【1-2】 $g\left(-\frac{1}{12}\right)$ 의 값을 구하시오. (30점)

【1-3】 $\int_{-\frac{1}{12}}^{0} f'(x)g(x)\left[f(x)-2\{f(x)\}^3\right]dx = \frac{q}{p}$ 라 할 때,

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수) (60점)

3. 출제 의도

【1-1】 합성함수 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가한다.

【1-2】 삼차방정식을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 결정할 수 있는지 평가한다.

【1-3】 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법
	성취기준	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[미적분]-(3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항1	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법
	성취기준	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
문항2	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식 -⑥ 여러 가지 방정식과 부등식
	성취기준	[10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
문항3	교육과정	[미적분]-(3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법
	성취기준	[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책신사고	2017	73-75
	미적분	이준열 외	천재교육	2018	61-64 88-92

5. 문항 해설

【1-1】 합성함수 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지 평가하는 문항임.

【1-2】 삼차방정식을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 결정할 수 있는지 평가하는 문항임.

【1-3】 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는지 평가하는 문항임.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1-1	조건을 이용하여 $\vert f(n)\vert = \vert f(0)\vert$ 임을 확인하면	5
	$\vert f'(n)\vert = \vert f'(n+1)\vert$ 임을 증명하면	15
1-2	방정식 $16a^3-3a\pm1/2=0$을 유도하면	20
	a의 값을 구하면	10
1-3	부분적분법을 활용하여 구하는 정적분을 $-g(-1/12)h(-1/12)-1/2\int_{-1/4}^{0}(3u-16u^3)^2du$ 으로 표현하면	40
	정적분의 값을 유리수 $\frac{q}{p}$ 로 표현하면	15
	$p+q$의 값을 구하면	5

7. 예시 답안

【1-1】 조건 (1)로부터 $f(x+1/2)^2+f(x)^2=1 \Rightarrow f(x+1)^2+f(x+1/2)^2=1$이므로
$f(x)^2=f(x+1)^2$이다. 그러므로 정수 n에 대하여 $\vert f(n)\vert = \vert f(0)\vert \neq 0$이다.
한편, $2f(x)f'(x)=2f(x+1)f'(x+1)$이므로

$$\vert f(n)\vert\ \vert f'(n)\vert = \vert f(n+1)\vert\ \vert f'(n+1)\vert \Rightarrow \vert f'(n)\vert = \vert f'(n+1)\vert .$$

따라서, $\vert f'(n)\vert = \vert f'(0)\vert$

【1-2】 $g(-1/12)=a$. $f(-1/12)f(5/12)=3a-16a^3$이고
$f(-1/12)^2+f(5/12)^2=1 \Rightarrow f(-1/12)=\pm\sqrt{2}/2$이므로 $16a^3-3a\pm 1/2=0$이다.
조건 (3)에 의해 $a=-1/4$이다.

【1-3】 $h(x)=1/2f(x)^2-1/2f(x)^4=1/2f(x)^2f(x+1/2)^2$ (조건 (1)).

준적분= $\displaystyle\int_{-1/12}^{0} g(x)h'(x)dx=[g(x)h(x)]_{-1/12}^{0}-\int_{-1/12}^{0} g'(x)h(x)dx$

$$=-g(-1/12)h(-1/12)-1/2\int_{-1/12}^{0}(f(x)f(x+1/2))^2g'(x)dx$$
$$=-g(-1/12)h(-1/12)-1/2\int_{-1/12}^{0}(3g(x)-16g(x)^3)^2g'(x)dx$$
$$=-g(-1/12)h(-1/12)-1/2\int_{-1/4}^{0}(3u-16u^3)^2du$$
$$=1/32-1/2\times 17/560=9/560$$

$p+q=569$.

[문항카드 2]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열II / 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	절대부등식, 접선의 방정식, 수열의 극한, 삼각함수의 덧셈정리, 정적분과 넓이
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 30분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (x_0, y_0)에서의 접선의 방정식은

$$y-y_0=2x_0(x-x_0)$$

(나)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(다) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(a) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\alpha$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=\alpha\beta$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

[문항]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(1) $0 < a_n < a_{n+1}$

(2) 점 $\mathrm{A}_n(a_n, {a_n}^2)$은 곡선 $P : y=x^2$ 위의 점이다.

(3) 곡선 P 위의 점 A_{n+1}에서의 접선이 두 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$와 이루는 예각의 크기가 서로 같다.

모든 자연수 n에 대하여

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad s_n = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$$

이라 하자.

【2-1】 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1}^3 + qa_{n+1} - a_n}{1 + pa_n a_{n+1}}$$

이 항상 성립할 때, 실수 p와 q의 값을 각각 구하시오. (30점)

【2-2】 모든 자연수 n에 대하여 $s_n > 1$이 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$이 성립함을 증명하시오. (30점)

【2-3】 $\lim_{n \to \infty} (r_n - s_n) = 0$이 성립함을 증명하시오. (20점)

【2-4】 모든 자연수 n에 대하여 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$에서 곡선 P에 의해 나누어진 영역 중 윗부분의 넓이를 U_n, 아랫부분의 넓이를 D_n이라 하자. $\lim_{n \to \infty} s_n = 3$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{U_n}{D_n}$의 값을 구하시오. (40점)

3. 출제 의도

【2-1】 곡선의 접선과 직선이 이루는 각이 만족하는 관계식을 삼각함수로 표현할 수 있는지 평가한다.

【2-2】【2-3】 절대부등식과 수열의 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 계산할 수 있는지 평가한다.

【2-4】 정적분을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 계산하고 수열의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학II]-(2) 미분 - ③ 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분
	성취기준·성취수준	[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(다)	교육과정	[미적분]-(1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항1	교육과정	[수학]-(2) 기하 - 2 직선의 방정식 [수학II]-(2) 미분 - 3 도함수의 활용 [미적분]-(2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
	성취기준·성취수준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
문항2	교육과정	[수학]-(3) 수와 연산 - 2 명제 [미적분]-(1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항3	교육과정	[미적분]-(1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
문항4	교육과정	[미적분]-(3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [미적분]-(1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	122-123 202-203
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2018	67
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	15-18, 62-64 155-156

5. 문항 해설

【2-1】 주어진 선분과 곡선의 접선이 이루는 각의 관계를 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 나타내고, 이를 통해 수열이 만족하는 관계를 표현할 수 있는가를 묻는 문항임.

【2-2】【2-3】 식의 변형을 통해 절대부등식을 증명하고, 수열의 극한값을 계산하기 위해 수열의 성질을 활용할 수 있는가를 묻는 문항임.

【2-4】 곡선과 직선 사이의 넓이를 정적분을 통해 계산하고, 수열의 성질을 활용하여 주어진 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문항임.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$과 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$, 그리고 A_{n+1}에서 접선의 기울기를 구했으면 5점 위 직선들이 이루는 예각에 대해 삼각함수(tan)의 합 또는 차를 이용하여 관계를 표현했으면 10점 a_{n+2}를 a_n과 a_{n+1}로 올바르게 표현했으면 15점	30
2-2	S_n을 변형하여 $\dfrac{1+4a_{n+1}^2}{1+4a_na_{n+1}}$을 얻었으면 5점 $a_n < a_{n+1}$을 이용하여 $S_n > 1$을 증명하였으면 10점 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} > a_1 + n(a_2 - a_1)$ (혹은 유사한 절대 부등식)을 증명하고, 이를 이용하여 $\dfrac{1}{a_n} \to 0$임을 보였으면 15점	30
2-3	$r_n - s_n$을 변형하여 $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n(1+4a_na_{n+1})}$을 얻었으면 10점 $\dfrac{1}{a_n} \to 0$을 이용하여 극한값이 0 임을 보였으면 10점	20
2-4	주어진 영역을 올바르게 표현하였으면(그림, 설명 등) 5점 윗부분의 넓이 U_n과 아랫부분의 넓이 D_n을 계산하였으면 15점 극한의 성질을 사용하여 $\lim_{n\to\infty} r_n = 3$임을 보였으면 10점 $\lim_{n\to\infty} r_n = 3$과 극한의 성질을 사용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{U_n}{D_n}$을 계산하였으면 10점	40

7. 예시 답안

【2-1】 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 기울기를 $\tan\alpha_n$이라 하고 $P: y = x^2$ 위의 점 A_{n+1}에서의 접선의 기울기를 $\tan\beta_{n+1}$이라 하자. (단, $0 < \alpha_n, \beta_{n+1} < \dfrac{\pi}{2}$) $\tan\alpha_n = a_{n+1} + a_n$이고, 제시문 (가)에 의해 $\tan\beta_{n+1} = 2a_{n+1}$. 조건 (3)에 의해 $\alpha_n + \alpha_{n+1} = 2\beta_{n+1}$이므로 제시문 (나)에 의해

$$\tan(\alpha_n + \alpha_{n+1}) = \frac{(a_{n+1}+a_n)+(a_{n+2}+a_{n+1})}{1-(a_{n+1}+a_n)(a_{n+2}+a_{n+1})} = \frac{4a_{n+1}}{1-4a_{n+1}^2} = \tan 2\beta_{n+1}.$$

a_{n+2}에 대하여 정리하면 $a_{n+2} = \dfrac{4a_{n+1}^3 + 2a_{n+1} - a_n}{1+4a_n a_{n+1}}$이므로 $p=4$, $q=2$이다.

【2-2】 $s_n = \dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$에서 a_{n+2}에 【2-1】에서 구한 식을 대입하면, $s_n = \dfrac{1+4a_{n+1}^2}{1+4a_n a_{n+1}}$이고 조건(1)에 의해 $s_n > 1$이다. 따라서 $a_{n+2} - a_{n+1} > a_{n+1} - a_n > \cdots > a_2 - a_1 > 0$이다. $d = a_2 - a_1$이라 하면 $a_{n+2} > a_{n+1} + d > \cdots > a_1 + (n+1)d$이고 $0 < \dfrac{1}{a_{n+2}} < \dfrac{1}{a_1+(n+1)d}$.
제시문 (다)에 의해 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_{n+2}} = 0$.

【2-3】 $r_n - s_n = \dfrac{a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}}{a_n(a_{n+1} - a_n)} = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n(1 + 4a_n a_{n+1})}$ 이다. 분자와 분모를 $a_n a_{n+1}$로 나누면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n} = 0$이므로 제시문(다)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - s_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}}{\dfrac{1}{a_{n+1}} + 4a_n} = 0.$

【2-4】 $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n = 3$이므로, 제시문(다)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}r_n = 3.$
사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$의 넓이 R_n, 곡선 P의 아랫부분의 넓이 D_n와 윗부분의 넓이 U_n은

$$R_n = \frac{(a_{n+1}^2 + a_n^2)(a_{n+1} - a_n)}{2}, D_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^2 dx = \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{3}, U_n = R_n - D_n = \frac{(a_{n+1} - a_n)^3}{6}$$

이다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3$이므로 제시문(다)에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{D_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{2(a_{n+1}{}^2 + a_n a_{n+1} + a_n{}^2)} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)^2}{2\left(\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 + \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} + 1\right)} = \frac{2}{13}.$$

[문항카드 3]

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사
전형명		논술(AAT) 전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열Ⅱ / 3
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	도함수, 역함수, 음함수의 미분법, 접선의 방정식, 함수의 그래프, 수열의 극한
예상 소요 시간		전체 시험시간 100분 중 40분

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여
(a) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
(b) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

(나) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\,g'(x)$$

(다) 함수 $f(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_0, f(x_0))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(마) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha \quad (\alpha\text{는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이면

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$$

[문항]

실수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}(7-a)x+4\cos x-2(\pi+1) & (x\ge 0)\\ -(a+1)x^2-(7-a)\ln(1-x)-2(\pi-1) & (x<0)\end{cases}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이 되기 위한 모든 a의 값의 범위는 $k_1\le a<k_2$이다.

【3-1】 k_1과 k_2의 값을 각각 구하시오. (20점)

【3-2】 $k_1 < a < k_2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 역함수 $g(x)$ 를 가진다. 곡선 $y=g(x)$ 의 y 절편을 $h(a)$ 라 할 때, 함수 $h(a)$ 는 미분가능하다. $h'(1)$ 의 값을 구하시오. (단, $h(1)=\frac{\pi}{3}$) (25점)

【3-3】 $a=1$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 원점을 지나도록 하는 모든 실수 t 의 집합을 S 라 하자.
(1) 집합 S 의 원소 중 열린구간 $(-2, 6\pi)$ 에 속하는 원소의 개수가 5임을 증명하시오.
(단, $6\ln 3+2\pi < 14$) (35점)

(2) 집합 S 의 원소 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 c_n 이라 하자.
$\lim_{n\to\infty}(c_{2n}-c_{2n-1})=\pi$ 가 성립함을 증명하시오. (40점)

3. 출제 의도

【3-1】 도함수를 구하고, 함수의 증가를 판정할 수 있는지를 평가한다.

【3-2】 함수 및 역함수의 성질을 이해하고, 음함수를 미분할 수 있는지 평가한다.

【3-3】 (1) 사잇값 정리 및 함수의 증가와 감소를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 평가한다.

【3-3】 (2) 함수의 그래프의 개형, 도함수, 사잇값 정리를 활용하여 수열의 극한을 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학II]-(2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12수학II01-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법
	성취기준·성취수준	[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - 3 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문(라)	교육과정	[수학II]-(1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
	성취기준·성취수준	[12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
제시문(마)	교육과정	[미적분]-(1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

문항 및 제시문		관련 성취기준
문항1	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [미적분]-(2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [미적분]-(2) 미분법 - 3 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문항2	교육과정	[수학]-(4) 함수 - 1 함수 [미적분]-(2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [미적분]-(2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [미적분]-(2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법
	성취기준·성취수준	[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.
문항3	교육과정	[미적분]-(2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [수학II]-(1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 [수학II]-(2) 미분 - 3 도함수의 활용 [미적분]-(1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2018	227-230
	수학II	박교식 외	동아출판	2018	40-41, 81-88
	미적분	박교식 외	동아출판	2019	19, 81-86 101-103

5. 문항 해설

【3-1】 도함수를 구하고 함수의 증가를 판정할 수 있는가를 묻는 문항임.

【3-2】 함수 및 역함수의 성질을 이해하고 음함수를 미분할 수 있는가를 묻는 문항임.

【3-3】 (1) 사잇값 정리 및 함수의 증가와 감소를 이용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는가를 묻는 문항임.

【3-3】 (2) 함수의 그래프의 개형, 도함수, 사잇값 정리를 활용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문항임.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$k_1=-1$을 구하면 10점 $k_2=3$을 구하면 10점	20
3-2	$(7-a)h(a)+4\cos(h(a))-2(\pi+1)=0$이 성립함을 보이면 10점 $h'(1)=\dfrac{(3+\sqrt{3})\pi}{36}$를 구하면 15점	25
3-3 (1)	열린구간 $(-2,0)$, $\left(2\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{5}{2}\pi,3\pi\right)$, $\left(4\pi,\frac{9}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{9}{2}\pi,5\pi\right)$에서 S의 원소가 오직 하나씩 존재함을 보이면 30점 구간 $[0,2\pi]$, $[3\pi,4\pi]$, $[5\pi,6\pi)$에서 S의 원소는 존재하지 않고, $\frac{5}{2}\pi$ 및 $\frac{9}{2}\pi$ 역시 S의 원소가 아님을 보이면 5점	35
3-3 (2)	$2n\pi<c_{2n-1}<2n\pi+\frac{1}{n}$ 또는 $\lim_{n\to\infty}(c_{2n-1}-2n\pi)=0$이 성립함을 보이면 15점 $(2n+1)\pi-\frac{1}{n}<c_{2n}<(2n+1)\pi$ 또는 $\lim_{n\to\infty}((2n+1)\pi-c_{2n})=0$이 성립함을 보이면 15점 $\lim_{n\to\infty}(c_{2n}-c_{2n-1})=\pi$가 성립함을 보이면 10점	40

7. 예시 답안

【3-1】

$$f'(x)=\begin{cases}(7-a)-4\sin x & (x\ge 0)\\ -2(a+1)x+\dfrac{7-a}{1-x} & (x<0)\end{cases}$$

이다. $x\ge 0$일 때 $a<3$이다. $x<0$일 때 $-1\le a<7$이다. 따라서 $k_1=-1$, $k_2=3$이다.

【3-2】

$h(a)=g(0)$이므로, $f(h(a))=f(g(0))=0$이다. $f(0)=-2(\pi-1)<0$이고 $f'(x)>0$이므로 $h(a)>0$이고,

$$f(h(a))=(7-a)h(a)+4\cos(h(a))-2(\pi+1)$$

이다. 따라서 $(7-a)h(a)+4\cos(h(a))-2(\pi+1)=0$이다. 양변을 미분하면.

$$-h(a)+(7-a)h'(a)-4\sin(h(a))h'(a)=0$$

이고, $h(1)=\dfrac{\pi}{3}$이므로, $h'(1)=\dfrac{(3+\sqrt{3})\pi}{36}$이다.

【3-3】

(1) $a=1$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이고, 이 접선이 원점을 지나면 $f(t)-tf'(t)=0$이다. $w(x)=f(x)-xf'(x)$라 하면

$$w(x)=\begin{cases}4\cos x+4x\sin x-2(\pi+1) & (x\ge 0)\\ 2x^2-6\ln(1-x)-\dfrac{6x}{1-x}-2(\pi-1) & (x<0)\end{cases}$$

이다. $w(-2)=14-6\ln 3-2\pi>0$, $w(0)=-2(\pi-1)<0$, $w\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,

$w(2n\pi)<0$, $w\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)>0$, $w((2n+1)\pi)<0$, $w\left(\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi\right)<0$이다. (단, n은 자연수)

$$w'(x)=\begin{cases}4x\cos x & (x\geq 0)\\ 4x-\dfrac{6x}{(1-x)^2} & (x<0)\end{cases}$$

이므로 열린구간 $\left(-2,-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)$, $\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi\right)$에서 $w'(x)<0$이고 열린구간 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}+1,0\right)$, $\left(2n\pi,\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$, $\left(\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi,(2n+2)\pi\right)$에서 $w'(x)>0$이다. (단, n은 음이 아닌 정수)

사잇값 정리 및 함수 $w(x)$의 증감에 의해 열린구간 $(-2,0)$, $\left(2\pi,\frac{5}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{5}{2}\pi,3\pi\right)$, $\left(4\pi,\frac{9}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{9}{2}\pi,5\pi\right)$에서 S의 원소가 오직 하나씩 존재하며, 구간 $[0,2\pi]$, $[3\pi,4\pi]$, $[5\pi,6\pi)$에서 S의 원소는 존재하지 않고, $\frac{5}{2}\pi$ 및 $\frac{9}{2}\pi$ 역시 S의 원소가 아니다. 따라서, 열린구간 $(-2,6\pi)$에 속하는 S의 원소의 개수가 5이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $\left[2n\pi,\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi\right]$에서 $w'(x)=4x\cos x\geq 8n\pi\times\frac{1}{2}=4n\pi$이므로, $w\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\geq w(2n\pi)+\frac{1}{n}\times 4n\pi>0$이다. 닫힌구간 $\left[\left(2n+\frac{2}{3}\right)\pi,(2n+1)\pi\right]$에서 $w'(x)=4x\cos x\leq -8n\pi\times\frac{1}{2}=-4n\pi$이므로 $w\left((2n+1)\pi-\frac{1}{n}\right)\geq w((2n+1)\pi)+\frac{1}{n}\times 4n\pi>0$이다.

따라서 $2n\pi<c_{2n-1}<2n\pi+\frac{1}{n}$, $(2n+1)\pi-\frac{1}{n}<c_{2n}<(2n+1)\pi$이므로, $\pi-\frac{2}{n}<c_{2n}-c_{2n-1}<\pi$이다.

제시문 (마)에 의해 $\lim_{n\to\infty}(c_{2n}-c_{2n-1})=\pi$가 성립한다.