2022학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열 Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	16:30 ~ 18:10 (100분)	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열 Ⅱ 문제지와 자연계열 Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 3쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(3쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것 (테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개 혹은 수정테이프를 사용하거나, 두 줄을 긋고 재작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(나) 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$이면

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,dx$$

(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $\left\{f\left(x+\frac{1}{4}\right)\right\}^2+\left\{f\left(x-\frac{1}{4}\right)\right\}^2=1$

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)=3g(x)-16\{g(x)\}^3$

(3) 열린구간 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$에서 $-\frac{1}{2}<g(x)<0$

(4) $f\left(\frac{5}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(0)=0$

【1-1】 모든 정수 n에 대하여 $|f'(n)|=|f'(0)|$이 성립함을 증명하시오. (단, $f(0)\neq 0$) (20점)

【1-2】 $g\left(-\frac{1}{12}\right)$의 값을 구하시오. (30점)

【1-3】 $\int_{-\frac{1}{12}}^{0} f'(x)g(x)\left[f(x)-2\{f(x)\}^3\right]dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수) (60점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 곡선 $y = x^2$ 위의 점 (x_0, y_0)에서의 접선의 방정식은

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$$

(나)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

(다) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad (\alpha,\ \beta\text{는 실수})$$

일 때,

(a) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \ne 0$, $\beta \ne 0$)

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (1) $0 < a_n < a_{n+1}$
> (2) 점 $\mathrm{A}_n(a_n, a_n^2)$은 곡선 $P : y = x^2$ 위의 점이다.
> (3) 곡선 P 위의 점 A_{n+1}에서의 접선이 두 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$와 이루는 예각의 크기가 서로 같다.

모든 자연수 n에 대하여

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n},\quad s_n = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$$

이라 하자.

【2-1】 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_{n+2} = \frac{4a_{n+1}^3 + qa_{n+1} - a_n}{1 + pa_n a_{n+1}}$$

이 항상 성립할 때, 실수 p와 q의 값을 각각 구하시오. (30점)

【2-2】 모든 자연수 n에 대하여 $s_n > 1$이 성립함을 보이고, 이를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$이 성립함을 증명하시오. (30점)

【2-3】 $\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0$이 성립함을 증명하시오. (20점)

【2-4】 모든 자연수 n에 대하여 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자. 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}$에서 곡선 P에 의해 나누어진 영역 중 윗부분의 넓이를 U_n, 아랫부분의 넓이를 D_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} s_n = 3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{D_n}$의 값을 구하시오. (40점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여
(a) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.
(b) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

(나) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

(다) 함수 $f(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_0, f(x_0))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(마) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha \quad (\alpha\text{는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이면

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$$

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

실수 a에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}(7-a)x+4\cos x-2(\pi+1) & (x\ge 0)\\ -(a+1)x^2-(7-a)\ln(1-x)-2(\pi-1) & (x<0)\end{cases}$$

이라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이 되기 위한 모든 a의 값의 범위는 $k_1\le a<k_2$이다.

【3-1】 k_1과 k_2의 값을 각각 구하시오. (20점)

【3-2】 $k_1<a<k_2$일 때, 함수 $f(x)$는 역함수 $g(x)$를 가진다. 곡선 $y=g(x)$의 y절편을 $h(a)$라 할 때, 함수 $h(a)$는 미분가능하다. $h'(1)$의 값을 구하시오. (단, $h(1)=\frac{\pi}{3}$) (25점)

【3-3】 $a=1$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 원점을 지나도록 하는 모든 실수 t의 집합을 S라 하자.
(1) 집합 S의 원소 중 열린구간 $(-2, 6\pi)$에 속하는 원소의 개수가 5임을 증명하시오. (단, $6\ln 3+2\pi<14$) (35점)

(2) 집합 S의 원소 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 c_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}(c_{2n}-c_{2n-1})=\pi$가 성립함을 증명하시오. (40점)