부록 4 문항카드(자연계열 – 수학)

[경북대학교 문항정보: 논술]

[문항카드 1]

1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사
전형명		논술(AAT) 전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열Ⅰ / 1
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	접선의 방정식, 점과 직선의 거리, 정적분, 도형의 넓이
예상 소요 시간		전체 시험시간 100분 중 25분

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 ℓ 사이의 거리는 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점과 직선 ℓ 사이의 거리 중 최솟값이다.

(다) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

(라) 두 함수 $f(x), g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$와 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

[문항]

모든 실수 c에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (c, c^2)에서의 접선을 ℓ_c라 하자. 직선 ℓ_c와 곡선 $y=-x^2+4x-3$이 만나지 않도록 하는 모든 실수 c의 값의 범위는 $\alpha<c<\beta$이다.

【1-1】 α와 β의 값을 각각 구하시오. (30점)

【1-2】 $\alpha<c<\beta$인 실수 c에 대하여 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 직선 ℓ_c 사이의 거리를 $f(c)$라 할 때, $f(c)$를 구하시오. (30점)

【1-3】두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x-3$과 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 영역 중 $\alpha \le c \le \beta$인 각각의 에 대하여 접선 ℓ_c가 지나는 모든 점의 집합을 S라 하자. 집합 S가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오. (50점)

3. 출제 의도

【1-1】 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하고 이차방정식이 해를 가지지 않을 조건을 구할 수 있는지 평가한다.

【1-2】 점과 직선의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

【1-3】 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학]-(2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[수학]-(2) 기하 - 1 평면좌표
	성취기준	[10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[수학II]-(2) 미분 - 3 도함수의 활용
	성취기준	[12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문(라)	교육과정	[수학II]-(3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항1	교육과정	[수학II]-(2) 미분 - 3 도함수의 활용 [수학]-(1) 문자와 식 - 5 이차방정식과 이차함수
	성취기준	[12수학II02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항2	교육과정	[수학]-(2) 기하 - 2 직선의 방정식
	성취기준	[10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
문항3	교육과정	[수학II]-(3) 적분 - 2 정적분 [수학II]-(3) 적분 - 3 정적분의 활용
	성취기준	[12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학II03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	132-133
	수학II	류희찬 외	천재교과서	2018	67-70 131-138

5. 문항 해설

【1-1】 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하고 이차방정식이 해를 가지지 않을 조건을 구할 수 있는지를 평가하는 문항임.

【1-2】 점과 직선의 거리를 구할 수 있는지 평가하는 문항임.

【1-3】 직선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 평가하는 문항임.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	곡선 $y=x^2$ 위의 점 (c, c^2)에서의 접선의 방정식 $y=2cx-c^2$을 구하면 10점 $\frac{D}{4}=(c-2)^2-(-c^2+3)<0$을 구하면 10점 $\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$를 구하면 10점	30
1-2	$(b, -b^2+4b-3)=(2-c, -c^2+1)$일 때 최솟값을 가진다는 것을 구하면 15점 $f(c)=\frac{-2c^2+4c-1}{\sqrt{4c^2+1}}$를 구하면 15점	30
1-3	S가 나타내는 도형을 구하면 20점 넓이가 $\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$임을 구하면 20점 넓이가 $\frac{7}{6}\sqrt{2}$임을 구하면 10점	50

7. 예시 답안

【1-1】 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (c, c^2)에서의 접선의 방정식은 $y=2cx-c^2$이다. 직선 $y=2cx-c^2$과 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 만나지 않을 조건은 이차방정식 $2cx-c^2=-x^2+4x-3$의 해가 존재하지 않을 조건과 같다. $\frac{D}{4}=(c-2)^2-(-c^2+3)<0$이므로

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2}<c<\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\beta$$

이다.

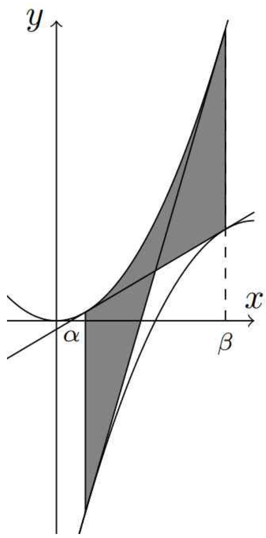
【1-2】 곡선 $y=-x^2+4x-3$ 위의 점 $(b,-b^2+4b-3)$에서 접선 $y=2cx-c^2$까지의 거리 중 최솟값은 점 $(b,-b^2+4b-3)$에서의 접선의 기울기가 $2c$일 때이므로 $-2b+4=2c$이고, $b=2-c$이다. $(b,-b^2+4b-3)=(2-c,-c^2+1)$이므로

$$f(c)=\frac{-2c^2+4c-1}{\sqrt{4c^2+1}}$$

이다.

【1-3】 S가 나타내는 도형은 [그림1]과 같다. 따라서 넓이 A는

$$\begin{aligned} A &= \int_\alpha^\beta \{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \int_\alpha^\beta (x-\beta)^2dx+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{3}(\alpha-\beta)^3+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3=\frac{7}{6}\sqrt{2}. \end{aligned}$$



[그림 1]

[문항카드 2]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열I / 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I
	핵심개념 및 용어	조합의 수, 직선의 방정식, 로그, 수열
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 35분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 서로 다른 n개에서 $r\,(0 \le r \le n)$개를 택하는 조합의 수는

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(나) 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

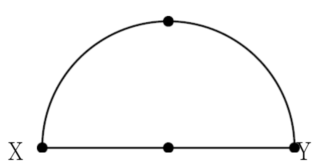
(다) $a>0,\, a\ne 1,\, b>0$일 때,

(a) $\log_a b^k = k\log_a b$ (단, k는 실수)

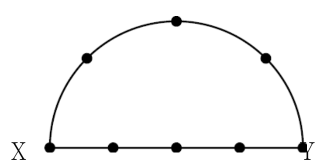
(b) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (단, $c>0, c\ne 1$)

[문항]

모든 자연수 n에 대하여 선분 XY를 지름으로 하는 반원에서 선분 XY를 2^n등분한 각 분점(X와 Y도 포함)과 호 XY를 2^n등분한 각 분점으로 이루어진 집합을 S_n이라 하자. 예를 들어, 두 집합 S_1과 S_2의 원소는 각각 아래 [그림1], [그림2]의 점과 같다.



[그림1]



[그림2]

집합 S_n의 원소인 점을 2개 이상 지나는 서로 다른 직선의 개수를 a_n, 집합 S_n의 원소인 점 3개를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 b_n이라 하자.

【2-1】 a_3 과 b_3 의 값을 각각 구하시오. (30점)

【2-2】 수열 $\{c_n\}$ 의 일반항을 $c_n = \dfrac{9b_n}{7(a_n-1)} + \dfrac{5}{7}$ 라 하자. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}_n(c_n, 0)$, $\mathrm{B}_n(c_{n+1}, 0)$, $\mathrm{C}_n(0, c_{n+2})$ 에 대하여 직선 $y = d_n x$ 가 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 의 넓이를 이등분한다. 직선 $y = d_n x$ 와 두 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$ 과 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 의 교점의 x 좌표를 각각 p_n 과 q_n 이라 하자.

(1) $\log_8(q_{100} - p_{100})$ 의 값을 구하시오. (40점)

(2) d_{100} 의 값을 구하시오. (50점)

3. 출제 의도

【2-1】 조합의 수를 활용한 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.

【2-2】 수열의 뜻을 알고, 로그의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학]-(5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합
	성취기준	[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
제시문(나)	교육과정	[수학]-(2) 기하 - $\boxed{2}$ 직선의 방정식
	성취기준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.
제시문(다)	교육과정	[수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{1}$ 지수와 로그
	성취기준	[12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항1	교육과정	[수학]-(5) 확률과 통계 - $\boxed{2}$ 순열과 조합
	성취기준	[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
문항2	교육과정	[수학]-(2) 기하 - $\boxed{2}$ 직선의 방정식 [수학Ⅰ]-(1) 지수함수와 로그함수 - $\boxed{1}$ 지수와 로그 [수학Ⅰ]-(3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열
	성취기준	[10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅰ01-04] 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2018	125-127, 270-272
	수학Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2018	24-30, 121-122

5. 문항 해설

【2-1】 조합의 수를 활용하여 경우의 수를 찾을 수 있는지를 평가하는 문항임.

【2-2】 수열의 뜻을 알고, 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족하는 값을 찾을 수 있는지를 평가하는 문항임.

6. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
2-1	$a_3 = {}_{16}\mathrm{C}_2 - {}_9\mathrm{C}_2 + 1 = 85$를 구하면	15
	$b_3 = {}_{16}\mathrm{C}_3 - {}_9\mathrm{C}_3 = 476$을 구하면	15
2-2	$c_n = \dfrac{9b_n}{7(a_n-1)} + \dfrac{5}{7} = 2^n$을 구하면	20
	$\log_8(q_{100} - p_{100}) = 33$을 구하면	20
	$p_n q_n = 2^{2n}$을 구하면	20
	$d_{100} = \sqrt{17} - 3$을 구하면	30

7. 예시 답안

【2-1】 S_n에 포함된 점의 총 개수는 2^{n+1}이고, S_n에 포함된 점 중에서 선분 XY 위에 있는 점의 총 개수는 2^n+1이다. a_n과 b_n은 아래와 같다.

$a_n = {}_{2^{n+1}}\mathrm{C}_2 - {}_{(2^n+1)}\mathrm{C}_2 + 1 = 3 \times 2^{n-1}(2^n - 1) + 1,$

$b_n = {}_{2^{n+1}}\mathrm{C}_3 - {}_{(2^n+1)}\mathrm{C}_3 = \dfrac{2^{n-1}(2^n-1)(7 \times 2^n - 5)}{3}.$

$a_3 = 85,\ b_3 = 476.$

【2-2】 (1) $c_n = \dfrac{9b_n}{7(a_n-1)} + \dfrac{5}{7} = 2^n$이다. 직선 $y = d_n x$와 두 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$과 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 교점을 각각 P_n과 Q_n이라 하자. 원점을 $\mathrm{O}(0,0)$이라 하자.

(삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이) = $\dfrac{1}{2} \times (2^{n+1} - 2^n) \times 2^{n+2} = 2^{2n+1}$ 이므로,

(삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{C}_n$의 넓이) = $\dfrac{1}{2} \times$(삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이) $= 2^{2n}$ 이다.

또한, (삼각형 $P_nQ_nC_n$의 넓이) = (삼각형 OQ_nC_n의 넓이) - (삼각형 OP_nC_n의 넓이)

$$= \frac{1}{2}\times 2^{n+2}\times q_n - \frac{1}{2}\times 2^{n+2}\times p_n$$

$$= \frac{1}{2}\times 2^{n+2}\times (q_n - p_n)$$ 이므로,

$q_n - p_n = 2^{n-1}$이고 $\log_8(q_{100} - p_{100}) = 33$이다.

(2) 두 점 A_n, C_n을 지나는 직선의 방정식은 $y = -4x + 2^{n+2}$이고, 두 점 B_n, C_n을 지나는 직선의 방정식은 $y = -2x + 2^{n+2}$이므로, $P_n(p_n, -4p_n + 2^{n+2}), Q_n(q_n, -2q_n + 2^{n+2})$이다.

두 점 P_n과 Q_n이 모두 직선 $y = d_nx$ 위에 있으므로, $d_n = \dfrac{-4p_n + 2^{n+2}}{p_n} = \dfrac{-2q_n + 2^{n+2}}{q_n}$이고

$p_nq_n = 2^{2n}$이다.

$q_n - p_n = 2^{n-1}$이고 $p_nq_n = 2^{2n}$이므로 $p_n = (\sqrt{17} - 1)2^{n-2}$ 이다. ($\because$ $p_n > 0$)

$d_n = \dfrac{-4p_n + 2^{n+2}}{p_n} = \sqrt{17} - 3$이므로, $d_{100} = \sqrt{17} - 3$이다.

[문항카드 3]

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술(AAT) 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 I / 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II
	핵심개념 및 용어	다항식의 나머지정리, 인수분해, 합성함수, 함수의 미분, 함수의 연속, 함수의 그래프의 개형
예상 소요 시간	전체 시험시간 100분 중 40분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

(가) 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 $A=BQ+R$ 가 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

(나) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
(iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때,
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

[문항]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$인 사차함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(1) 방정식 $f'(x)=0$은 세 실근 α, β, γ $(\alpha\leq\beta\leq\gamma)$를 가진다.
(2) 사차다항식 $f(x)$를 삼차다항식 $f'(x)$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{4}\left(x-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$, 나머지는 $-\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+2$이다.

【3-1】 $\alpha=\beta$이고 $\beta\neq\gamma$가 성립함을 증명하시오. (40점)

【3-2】 $\gamma-\alpha$의 값을 구하시오. (40점)

【3-3】 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\alpha & (x<k)\\ 2\alpha & (x\geq k)\end{cases}$$

라 할 때, $g(x)$는 $x=k$에서 불연속이다.

(1) 함수 $(f\circ g)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 α의 값을 구하시오. (20점)

(2) 함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 k의 최댓값을 구하시오. (20점)

3. 출제 의도

【3-1】 다항식의 나눗셈과 미분을 이용하여 주어진 식을 증명할 수 있는지 평가한다.

【3-2】 미분을 이용하여 극값들의 관계를 구할 수 있는지 평가한다.

【3-3】 연속을 이해하여 조건을 만족하는 값을 찾을 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문(가)	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식 - ② 나머지 정리
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다.
제시문(나)	교육과정	[수학II]-(1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속
	성취기준	[12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
제시문(다)	교육과정	[수학II]-(2) 미분 - ② 도함수
	성취기준	[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
문항1	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식 - ② 나머지 정리 [수학II]-(2) 미분 - ② 도함수
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
문항2	교육과정	[수학]-(1) 문자와 식 - ② 나머지 정리 [수학II]-(2) 미분 - ② 도함수 [수학]-(1) 문자와 식 - ③ 인수분해

문항 및 제시문		관련 성취기준
	성취기준	[10수학01-02] 항등식의 성질을 이해한다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
문항3	교육과정	[수학]-(4) 함수 - 1 함수 [수학II]-(1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 [수학II]-(2) 미분 - 2 도함수의 활용
	성취기준	[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종속 외	금성출판사	2018	21-31 36-38 229-232
	수학II	김원경 외	비상	2018	31-32 61-64 78-89

5. 문항 해설

【3-1】 다항식의 나눗셈과 미분을 이용하여 주어진 식을 증명할 수 있는지를 묻는 문항임.

【3-2】 미분을 이용하여 극값들의 관계를 구할 수 있는지 묻는 문항임.

【3-3】 연속을 이해하여 조건을 만족하는 값을 찾을 수 있는지 묻는 문항임.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$f(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(x-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)-\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+2$ 가 성립함을 보이면 10점 $f'(\alpha)=\frac{1}{12}(2\alpha-\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$임을 보이면 10점 $2\alpha=\beta+\gamma$ 또는 $\alpha=\gamma$ 인 경우 성립하지 않음을 보이면 20점	40
3-2	$f'(x)$를 구하면 10점 $x=\gamma$를 대입하면 $f'(\gamma)=\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3-\frac{2}{3}(\gamma-\alpha)=0$을 구하면 20점 $r-\alpha=2$를 구하면 10점	40

3-3	(1) $(f\circ g)(x)$가 연속이므로 $f(\alpha)=f(2\alpha)$임을 보이면 10점 $f(\alpha)=f(2\alpha)$의 방정식을 풀어서 $\alpha=\dfrac{8}{3}$을 구하면 10점 (2) $(g\circ f)(x)$가 연속이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$를 만족시켜야 함을 보이면 10점 k의 최댓값은 $f(x)$의 최솟값인 $f(\gamma)=f(\alpha+2)=\dfrac{2}{3}$임을 구하면 10점	40

7. 예시 답안

【3-1】 조건에 의해

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(x-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)-\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+2$$

$f'(\alpha)=\dfrac{1}{12}(2\alpha-\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$이다. 그러므로 (i) $2\alpha=\beta+\gamma$ 또는 (ii) $\alpha=\beta$ 또는 (iii) $\alpha=\gamma$ 이다.

(i) 또는 (iii) 이면 $\alpha=\beta=\gamma$이므로 $f'(x)=(x-\alpha)^3$, $f(x)=\dfrac{1}{4}(x-\alpha)^4+2$ $(\because f(\alpha)=2)$

이 경우 $f(x)$를 $f'(x)$로 나누었을 때 나머지가 상수이므로 성립하지 않는다.
그러므로 $\alpha=\beta$, $\beta\neq\gamma$이다.

【3-2】 $\alpha=\beta$, $\beta\neq\gamma$이므로 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x)=\frac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\gamma)\left(x-\frac{2\alpha+\gamma}{3}\right)-\frac{1}{3}(x-\alpha)^2+2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\gamma)\left(x-\frac{2\alpha+\gamma}{3}\right)+\frac{1}{4}(x-\alpha)^2\left(x-\frac{2\alpha+\gamma}{3}\right)+\frac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\gamma)-\frac{2}{3}(x-\alpha)$$

이고 $x=\gamma$를 대입하면 $f'(\gamma)=\dfrac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3-\dfrac{2}{3}(\gamma-\alpha)=0$이다. 그러므로 $r-\alpha=2$이다.

【3-3】 $r-\alpha=2$ 이므로 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x-\alpha)^2(x-\alpha-2)\left(x-\alpha-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(x-\alpha)^2+2$이다.

(1) 함수 $g(x)$는 $x=k$에서 불연속이므로 $\alpha\neq 0$이다. 함수 $(f\circ g)(x)$가 연속이므로

$f(g(k))=f(2\alpha)$, $\displaystyle\lim_{x\to k-}f(g(x))=f(\alpha)$, $\displaystyle\lim_{x\to k+}f(g(x))=f(2\alpha)$

$2=f(\alpha)=f(2\alpha)=\dfrac{1}{4}\alpha^2(\alpha-2)\left(\alpha-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{3}\alpha^2+2$이다. 그러므로 $\alpha=\dfrac{8}{3}$이다.

(2) 함수 $(g\circ f)(x)$가 연속이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$를 만족시켜야 한다. 그러므로 k의 최댓값은 $f(x)$의 최솟값이다. 즉, k의 최댓값은 $f(\gamma)=f(\alpha+2)=\dfrac{2}{3}$이다.