2021학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4) 실수 c가 닫힌구간 $[a, b]$에 포함될 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

이다.

(나) 정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

(단, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$)

(다) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

(라) 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

두 함수 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{\cos x}{x}$에 대하여 $f(x) = g(x)$를 만족시키는 모든 양의 실수 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 $a_{10} - a_2$의 값을 구하시오. (20점)

【1-2】 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오. (40점)

【1-3】 자연수 n에 대하여

$$A_n = \left|\int_{a_n}^{a_{n+1}}\{f(x) - g(x)\}dx\right|$$

라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n} A_k$의 값을 구하시오. (50점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면

$$f'(a)=0$$

이다.

(나)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(다) 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

이다.

(라) 수열의 극한값의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\{c_n\}$은 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+n$은 다음 조건을 만족시킨다. (단, n은 정수)

함수 $f(x)$는 $x=m$에서 극댓값 m^3+n을 갖고, $x=-m$에서 극솟값을 갖는다. (단, m은 자연수)

다음 물음에 답하시오.

【2-1】 $\dfrac{4ac}{m^2}$의 값을 구하시오. (30점)

【2-2】 두 곡선 $y=f(x)$, $y=mx^2+n$과 두 직선 $x=0$, $x=m$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_m이라 하고, 이 도형의 내부 또는 경계에 속하는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 B_m이라 하자.

(1) 자연수 k에 대하여, $m=2k-1$이면

$$B_m = \frac{k(pk^3+qk^2+rk+s)}{6}$$

이다. $\dfrac{(p-q)r}{s}$의 값을 구하시오. (단, p, q, r, s는 상수) (40점)

(2) 수열 $\left\{\dfrac{B_m}{A_m}\right\}$이 수렴함을 증명하시오. (50점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.
(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되고
(2) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며
(3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(나) 첫째항이 a, 공비가 $r(r\neq 0,1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$이다.

(다)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(라) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$이면, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

두 연속함수 $f(x)$와 $g(t)$에 대하여

$$f(x+t) = f(x)^{g(t)},\ \ln f(e) = 2\ln f(0)$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 모든 실수 x, t에 대하여 $f(x)>1$이고 $g(t)>0$)

【3-1】 $g(0)$의 값을 구하시오. (10점)

【3-2】 $\sum_{n=1}^{10} \ln f(ne) = \alpha \ln f(0)$일 때, 정수 α의 값을 구하시오. (40점)

【3-3】 $f(e)=e^4$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\ln f(1)$의 값을 구하시오. (30점)

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln f\left(e+\frac{e}{n}\right)-4}{\frac{1}{n}}$의 값을 구하시오. (40점)

2021학년도 논술(AAT) 모의고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅱ)

자연계열 Ⅱ 1번 예시 답안

【1-1】(20점)

○ **예시 답안:** $f(x)=g(x) \Rightarrow \sin x=\cos x$ 이므로 $\tan x=1$이다.

이때 $x=\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi, \dfrac{9}{4}\pi, \cdots$이다. 즉 공차를 π로 갖고 첫째항이 $\dfrac{\pi}{4}$인 등차수열 $a_n=\dfrac{\pi}{4}+(n-1)\pi$(단, n은 자연수이다)에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 서로 만난다. 따라서 $a_n=\dfrac{\pi}{4}+(n-1)\pi$이고 $a_{10}-a_2=8\pi$이다.

【1-2】(40점)

○ **예시 답안:** $a_n=\dfrac{\pi}{4}+(n-1)\pi$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}}$이다. 따라서

$$\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx \le \frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}} \le \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx$$

인 것을 알 수 있다. 로그함수의 적분법에 의해

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right),$$

$$\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)$$

임을 알 수 있다. 즉

$$\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\le\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)$$

이고 $\displaystyle\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)=\frac{1}{\pi}$이므로 답은 $\dfrac{1}{\pi}$이다.

【1-3】(50점)

○ **예시 답안:** $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_{n+1}}dx\le\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{x}dx\le\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_n}dx$이고 $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}$이므로

$$2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k\le 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

이다. 【1-2】에 의해 답은 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$이다.

자연계열 Ⅱ 1번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \cdots$을 구한다.	10
	$a_n=\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi$(단, n은 자연수)를 구하고 $a_{10}-a_2=8\pi$임을 구한다.	10
1-2	$\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx \le \frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}} \le \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int$ 임을 구한다.	15
	$\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)=\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx$이고 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)$임을 구한다.	15
	$\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)=\frac{1}{\pi}$을 구한다.	10
1-3	$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_{n+1}}dx \le \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}(\sin x-\cos x)dx \le \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_n}dx$ 임을 안다.	20
	$\int_{a_n}^{a_{n+1}}(\sin x-\cos x)dx=2\sqrt{2}$임을 구한다.	10
	$2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k \le 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$임을 알고 구하고 답 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$을 구한다.	20

자연계열 Ⅱ 2번 예시 답안

【2-1】 (30점)

❍ 예시 답안:

주어진 조건과 제시문 (가)를 이용하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x+m)(x-m) = 3ax^2 - 3am^2$$

이다. 좌변과 우변의 계수를 비교하면 $b=0,\ c=-3am^2$ 이므로 $f(x) = ax^3 - 3am^2x + n$ 이다. 주어진 조건을 이용하면

$$f(m) = -2am^3 + n = m^3 + n$$

이므로 $a = -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}m^2x + n$ 이고

$$\frac{4ac}{m^2} = \frac{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{2}m^2}{m^2} = -3$$

이다.

【2-2】 (90점)

❍ 예시 답안:

(1)

주어진 도형의 내부 또는 경계에서 직선 $x=i$(i는 $0 \le i \le m$인 정수)위의 y좌표가 정수인 점의 개수를 L_i라 하자.

자연수 k에 대하여, $m=2k-1$ 이면

$$f(i) = -\frac{1}{2}i^3 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i + n = \frac{i}{2}\left(-i^2 + 3(2k-1)^2\right) + n$$

이다. 여기서 i가 짝수이면 $\frac{i}{2}$가 정수이므로 $-\frac{1}{2}i^3 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i$ 는 정수이고, i가 홀수이면 $-i^2 + 3(2k-1)^2$은 짝수이므로 $-\frac{1}{2}i^3 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i$ 는 정수이다. 즉, $f(i)$는 정수이다.

따라서

$$L_i = -\frac{1}{2}i^3 - (2k-1)i^2 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i + 1$$

이고

$$\begin{aligned}
B_m &= B_{2k-1} = \sum_{i=0}^{2k-1} L_i = \sum_{i=0}^{2k-1}\left(-\frac{1}{2}i^3 - (2k-1)i^2 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i + 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{(2k-1)2k}{2}\right\}^2 - (2k-1) \times \frac{(2k-1)2k(4k-1)}{6} + \frac{3}{2}(2k-1)^2 \times \frac{(2k-1)2k}{2} + 2k \\
&= \frac{k(28k^3 - 56k^2 + 35k + 5)}{6}
\end{aligned}$$

이다. 즉

$$\frac{(p-q)r}{s}=\frac{(28+56)35}{5}=588$$

이다.

(2)

주어진 도형의 내부 또는 경계에서 직선 $x=i$(i는 $0\le i\le m$인 정수)위의 y좌표가 정수인 점의 개수를 L_i라 하면

$$-\frac{1}{2}i^3-mi^2+\frac{3}{2}m^2i=-\frac{1}{2}i^3+\frac{3}{2}m^2i+n-(mi^2+n)\le L_i$$
$$\le-\frac{1}{2}i^3+\frac{3}{2}m^2i+n-(mi^2+n)+1=-\frac{1}{2}i^3-mi^2+\frac{3}{2}m^2i+1$$

이다. 따라서

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2-m\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{3}{2}m^2\times\frac{m(m+1)}{2}\le B_m=\sum_{i=0}^{m}L_i$$
$$\le-\frac{1}{2}\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2-m\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{3}{2}m^2\times\frac{m(m+1)}{2}+m+1$$

이고, 이 부등식에서 가장 왼쪽 값을 C_m, 가장 오른쪽 값을 D_m이라 하자. 또한

$$A_m=\int_0^m\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}m^2x-mx^2\right)dx=-\frac{1}{8}m^4+\frac{3}{4}m^4-\frac{1}{3}m^4=\frac{-3+18-8}{24}m^4=\frac{7}{24}m^4$$

이다. 부등식

$$\frac{C_m}{A_m}\le\frac{B_m}{A_m}\le\frac{D_m}{A_m}$$

에서

$$\lim_{m\to\infty}\frac{C_m}{A_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{D_m}{A_m}=1$$

이므로 제시문 (라)에 의하여 수열 $\left\{\frac{B_m}{A_m}\right\}$이 1로 수렴한다.

자연계열 Ⅱ 2번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$b=0,\ c=-3am^2$ 을 구한다.	10
	$a=-\dfrac{1}{2}$ 을 구한다.	10
	$\dfrac{4ac}{m^2}=-3$ 을 구한다.	10
2-2	(1) $f(i)$ 가 정수임을 보인다.	20
	(1) L_i 를 구한다.	10
	(1) $B_m=B_{2k-1}$ 을 구하고 $\dfrac{(p-q)r}{s}=588$ 을 구한다.	10
	(2) L_i 의 부등식을 구한다.	20
	(2) B_m 의 범위를 구한다.	10
	(2) A_m 을 구한다.	10
	(2) $\lim_{m\to\infty}\dfrac{C_m}{A_m}=\lim_{m\to\infty}\dfrac{D_m}{A_m}=1$ 을 계산한다.	10

자연계열 Ⅱ 3번 예시 답안

【3-1】 (10점)

○ 예시 답안:

$x=0$, $t=0$ 을 바로 대입하면 $f(0)=f(0)^{g(0)}$ 가 되어서 $g(0)=1$ 이다.

【3-2】(40점)

○ 예시 답안: $f(x+t)=f(x)^{g(t)}$에 로그를 취하면 $\ln f(x+t)=g(t)\ln f(x)$이다.

$h(t)=\ln f(t)$라 놓으면 $h(x+t)=g(t)h(x)$이다.

$h(x+0)=h(0)g(x)$이므로 즉, $h(x+t)=\dfrac{1}{h(0)}h(t)h(x)$이다.

임의의 정수 n에 대해 $h(ne)=\dfrac{1}{h(0)}h(e)h((n-1)e)=\cdots=\{h(0)\}^{1-n}\{h(e)\}^n$ 이므로

$\ln f(ne)=\{\ln f(0)\}^{1-n}\{2\ln f(0)\}^n=2^n\ln f(0)$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\ln f(ne)=2(2^{10}-1)\ln f(0)$이다. 따라서 $\alpha=2(2^{10}-1)=2046$이다

【3-3】(70점)

(1) (30점)

○ 예시 답안: 임의의 정수 n에 대해 $h(n)=\dfrac{1}{h(0)}h(1)h(n-1)=\cdots=h(0)^{1-n}h(1)^n$ ----(*)이다.

(*)를 이용하면 임의의 정수 n에 대해

$h(1)=h\left(n\times\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{h(0)}h\left(\dfrac{1}{n}\right)h\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\cdots=\{h(0)\}^{1-n}\left\{h\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}^n$

$\Rightarrow h\left(\dfrac{1}{n}\right)=\{h(0)\}^{1-\frac{1}{n}}\{h(1)\}^{\frac{1}{n}}$ (5점)이므로 임의의 두 정수 m,n에 대해

$h\left(\dfrac{n}{m}\right)=h(0)^{1-n}h\left(\dfrac{1}{m}\right)^n=h(0)^{1-\frac{n}{m}}h(1)^{\frac{n}{m}}$ ----(**)이다.

또한 f와 $\ln x$가 $x>0$에서 연속이므로 $h(x)=\ln f(x)$도 $x>0$에서 연속이다. 그래서 $h(e)$는 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}h(0)^{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}h(1)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=h(0)^{1-e}h(1)^e$이다.

$\ln f(e)=2\ln f(0)$이므로 $f(0)=e^2$이고 그래서 $4=h(e)=2^{1-e}h(1)^e$이므로 $\ln f(1)=h(1)=2^{1+\frac{1}{e}}$이다.

(2) (40점)

○ 예시 답안: (**)를 이용하면

$h(e)=h\left(n\times\dfrac{e}{n}\right)=\dfrac{1}{h(0)}h\left((n-1)\times\dfrac{e}{n}\right)h\left(\dfrac{e}{n}\right)=\cdots=h(0)^{1-n}h\left(\dfrac{e}{n}\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{h(e+\frac{e}{n})-h(e)}{\frac{1}{n}}=h(e)\lim_{n\to\infty}\frac{h(\frac{e}{n})\frac{1}{h(0)}-1}{\frac{1}{n}}=h(e)\lim_{n\to\infty}\frac{h(0)^{-\frac{1}{n}}h(e)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ 이다.

$h(0)=2, h(e)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{h(e+\frac{e}{n})-h(e)}{\frac{1}{n}}=4\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ 을 계산하기 위하여 $t_n=\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}$ 라 하자. 그러면 $\frac{1}{n}=\log_2(1+\frac{1}{t_n})$ 이다. 그래서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=$ $\lim_{t_n\to\infty}\frac{1}{\log_2(1+\frac{1}{t_n})^{t_n}}=\frac{1}{\log_2 e}=\ln 2$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln f(e+\frac{e}{n})-\ln f(e)}{\frac{1}{n}}=h(e)\ln 2=4\ln 2$ 이다.

자연계열 Ⅱ 3번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$x=0$, $t=0$ 을 바로 대입하여 $g(0)=1$ 구한다.	10
3-2	$h(t)=\ln f(t)$일 때, $h(x+t)=\dfrac{1}{h(0)}h(t)h(x)$관계식을 구한다.	10
	임의의 정수 n에 대해 $h(ne)=\dfrac{1}{h(0)}h(e)h((n-1)e)=\cdots=\{h(0)\}^{1-n}\{h(e)\}^{n}$ 구한다.	10
	$\ln f(ne)=\{\ln f(0)\}^{1-n}\{2\ln f(0)\}^{n}=2^{n}\ln f(0)$임을 구한다.	10
	$\alpha=2046$을 구한다.	10
3-3	(1) n에 대해 $h(n)=\dfrac{1}{h(0)}h(1)h(n-1)=\cdots=h(0)^{1-n}h(1)^{n}$구한다.	5
	(1) $h\left(\dfrac{1}{n}\right)=\{h(0)\}^{1-\frac{1}{n}}\{h(1)\}^{\frac{1}{n}}$를 구한다.	5
	(1)$h\left(\dfrac{n}{m}\right)=h(0)^{1-n}h\left(\dfrac{1}{m}\right)^{n}=h(0)^{1-\frac{n}{m}}h(1)^{\frac{n}{m}}$를 구한다.	10
	(1)$h(e)=h(0)^{1-e}h(1)^{e}$를 구한다.	5
	(1)$\ln f(1)=h(1)=2^{1+\frac{1}{e}}$임을 구한다.	5
	(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{h(e+\frac{e}{n})-h(e)}{\frac{1}{n}}=h(e)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{h(0)^{-\frac{1}{n}}h(e)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$ 임을 구한다.	10
	(2) 치환한다.	10
	(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 2$임을 구한다.	10
	(2)$4\ln 2$임을 구한다.	10