2021학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 I 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

시 험 시 간	100분		
지원학과(부)	학과(부, 전공)		감독위원 확인
수 험 번 호			㊞
성 명			

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x = g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

(나) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ (단, } a < x < b\text{)}$$

가 성립한다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 연속이고 다음을 만족시킨다.

$$\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt = \sin(ax^2) + \cos(bx^2) + \sqrt{2}$$

$\left(\text{단, } a+b = -\frac{3}{2}\pi\right)$

【1-1】 다음을 증명하시오. (30점)

$$\boxed{\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt = \int_1^x f(t)(x^2 - tx)dt}$$

【1-2】 두 실수 a, b의 값을 각각 구하시오. (40점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

이다.

(다) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

(라) 함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

곡선

$$C: y=x\ln x+\frac{x}{2}\quad(x>0)$$

위의 점 (x_n, y_n)에서의 접선과 y축과의 교점을 $(0, a_n)$이라 하자. 또한, 곡선 C와 x축 및 두 직선 $x=x_n$, $x=x_{n+1}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=-r^{n-1}$일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, r는 1보다 큰 상수이고, n은 자연수이다.)

【2-1】 $\dfrac{\ln x_{21}}{\ln x_{20}}$의 값을 구하시오. (30점)

【2-2】 $\dfrac{1}{r^2-1}\left(\dfrac{A_{20}}{r^{38}\ln r}-\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (30점)

【2-3】 20 이하의 자연수 m에 대하여

$$B_m=\sum_{n=m}^{20}\frac{A_n}{\ln r}$$

이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{B_1}{2r^{40}}$의 값을 구하시오. (30점)

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{20}\left(\frac{B_1-B_m}{r^{2m-2}}\right)$의 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 이산확률변수 X의 확률분포가 다음과 같다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	p_n	1

이때, 확률변수 X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k\, p_k$$

이다.

(나) 두 사건 A와 B에 대하여, 사건 B가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

이다.

(다)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

자연수 k에 대하여, 1부터 k까지의 자연수가 각각 적힌 k장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 한 장의 카드를 임의로 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣고, 다시 한 장의 카드를 임의로 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한다. 첫 번째 카드에서 나온 수를 P_k, 두 번째 나온 수를 Q_k라 하면 P_k와 Q_k는 1부터 k까지의 자연수 값을 가지는 이산확률변수가 된다. 각각의 카드가 뽑힐 확률이 모두 같을 때, 다음 물음에 답하시오.

【3-1】 이차방정식 $x^2-2P_6\,x+Q_6=0$의 실근의 개수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$를 구하시오. (30점)

【3-2】 이차방정식 $x^2-2P_6\,x+Q_6=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 두 근의 차가 4보다 클 확률을 구하시오. (40점)

【3-3】 자연수 n에 대하여 $k=n^2$일 때, 이차함수

$$y=x^2-2P_k\,x+Q_k$$

의 최솟값이 n보다 클 사건을 E_n이라 하자.
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{n\,\mathrm{P}(E_n)\}$의 값을 구하시오. (50점)

2021학년도 논술(AAT) 모의고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅰ)

자연계열 Ⅰ 1번 예시 답안

【1-1】(30점)

○ **예시 답안:** 좌변에서 $x-t=u$로 놓으면

$$\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt = \int_x^1 [-f(u)\{(x-u)x\}]du = \int_1^x f(u)(x^2-ux)du = \int_1^x f(t)(x^2-tx)dt$$

이다.

【1-2】(40점)

○ **예시 답안:** 【1-1】에서 얻은 결과를 바탕으로 다음의 등식을 얻을 수 있다.

$$\int_1^x f(t)(x^2-tx)dt = \sin(ax^2)+\cos(bx^2)+\sqrt{2}$$

위의 등식에 $x=1$을 대입하면

$$0 = \sin a + \cos b + \sqrt{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

한편, $\int_1^x f(t)(x^2-tx)dt = x^2\int_1^x f(t)dt - x\int_1^x tf(t)dt$이고, 위의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = (2ax)\cos(ax^2) - (2bx)\sin(bx^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (**)$$

이다. 등식 $(**)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0 = 2a\cos a - 2b\sin b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (***)$$

이 때, $a+b = -\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos b = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}-a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a$ 이고 비슷한 방법으로 $\sin b = \cos a$ 이다.

등식 $(*)$에서 $\sin a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 등식 $(***)$에서 $2(a-b)\cos a = 0$ 이다.

이 때, $\cos a \neq 0$이므로 $a=b$이다.

따라서 $a=b= -\frac{3}{4}\pi$ 이다.

자연계열 Ⅰ 1번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$u=x-t$로 치환한다.	10
	$\int_0^{x-1} f(x-t)(tx)dt = \int_1^x f(t)(x^2-tx)dt$ 임을 증명한다.	20
1-2	등식 $0 = \sin a + \cos b + \sqrt{2}$를 구한다.	10
	등식 $2x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt = (2ax)\cos(ax^2) - (2bx)\sin(bx^2)$ 를 구한다.	10
	등식 $0 = 2a\cos a - 2b\sin b$를 구한다.	10
	답 $a=b=-\frac{3}{4}\pi$를 구한다.	10

자연계열 Ⅰ 2번 예시 답안

【2-1】(30점)

○ **예시 답안:** $f(x)=x\ln x+\dfrac{x}{2}$라 두면, $f'(x)=\ln x+\dfrac{3}{2}$이므로 곡선 C위의 점 $(x_n,\, y_n)$에서의 접선의 방정식은

$$y-y_n=\left(\ln x_n+\frac{3}{2}\right)(x-x_n)$$

이다. 이 접선과 y축과의 교점이 $(0,\, a_n)$이므로, 다음 등식을 얻는다.

$$a_n-y_n=\left(\ln x_n+\frac{3}{2}\right)(-x_n)$$

한편, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -1, 공비가 r인 등비수열이므로 $a_n=-r^{n-1}$이고, $y_n=f(x_n)=x_n\ln x_n+\dfrac{x_n}{2}$이므로 이를 위 식에 대입하여 정리하면 $x_n=r^{n-1}$을 얻는다. 이로부터 $\ln x_n=(n-1)\ln r$이다. 따라서 $\dfrac{\ln x_{21}}{\ln x_{20}}=\dfrac{20\ln r}{19\ln r}=\dfrac{20}{19}$이다.

【2-2】(30점)

○ **예시 답안:** (2-1)의 풀이과정에서 얻은 결과를 바탕으로 A_n을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f(x)|\,dx=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left|x\ln x+\frac{x}{2}\right|dx=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$$

이를 부분적분법을 이용해 계산하면

$$\begin{aligned}A_n&=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{r^{n-1}}^{r^n}\\&=\frac{1}{2}\left(r^{2n}\ln r^n-r^{2n-2}\ln r^{n-1}\right)=\frac{1}{2}\{nr^2-(n-1)\}r^{2n-2}\ln r\end{aligned}$$

이다. 이로부터 $A_{20}=\dfrac{1}{2}(20r^2-19)r^{38}\ln r$이다.

따라서 $\dfrac{1}{r^2-1}\left(\dfrac{A_{20}}{r^{38}\ln r}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{r^2-1}\left\{\dfrac{1}{2}(20r^2-19)-\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{10(r^2-1)}{r^2-1}=10$이다.

【2-3】(60점)

(1) (30점)

○ **예시 답안:** (2-2)의 풀이과정에서 얻은 식 $A_n=\displaystyle\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$와 제시문 (라)를 이용하면,

$$B_1 = \sum_{n=1}^{20} \frac{A_n}{\ln r} = \frac{1}{\ln r}\sum_{n=1}^{20} A_n = \frac{1}{\ln r}\sum_{n=1}^{20}\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x + \frac{x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\ln r}\int_{1}^{r^{20}}\left(x\ln x + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\ln r}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^{r^{20}} = 10r^{40}$$

이다. 따라서 $\dfrac{B_1}{2r^{40}} = 5$이다.

(2) (30점)

○ **예시 답안:** (2-2)의 풀이과정에서 얻은 식 $A_n = \displaystyle\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x + \frac{x}{2}\right)dx$와 제시문 (라)를 이용하면,

$$B_m = \sum_{n=m}^{20} \frac{A_n}{\ln r} = \frac{1}{\ln r}\sum_{n=m}^{20} A_n = \frac{1}{\ln r}\sum_{n=m}^{20}\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x + \frac{x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\ln r}\int_{r^{m-1}}^{r^{20}}\left(x\ln x + \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\ln r}\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{r^{m-1}}^{r^{20}} = 10r^{40} - \frac{m-1}{2}r^{2m-2}$$

이다. (2-3) (1)에서 구한 $B_1 = 10r^{40}$으로부터 $B_1 - B_m = \dfrac{m-1}{2}r^{2m-2}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\sum_{m=1}^{20}\left(\frac{B_1 - B_m}{r^{2m-2}}\right) = \sum_{m=1}^{20}\left(\frac{m-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{20}(m-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{20\times 21}{2} - 20\right) = 95$$

이다.

자연계열 Ⅰ 2번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	접선의 방정식 $y-y_n=\left(\ln x_n+\frac{3}{2}\right)(x-x_n)$ 을 구한다.	10
	$x_n=r^{n-1}$을 구한다.	10
	$\frac{\ln x_{21}}{\ln x_{20}}=\frac{20}{19}$ 을 구한다.	10
2-2	$A_n=\int_{r^{n-1}}^{r^n}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$ 또는 $A_{20}=\int_{r^{19}}^{r^{20}}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$를 구한다.	10
	$A_{20}=\frac{1}{2}(20r^2-19)r^{38}\ln r$를 구한다.	10
	$\frac{1}{r^2-1}\left(\frac{A_{20}}{r^{38}\ln r}-\frac{1}{2}\right)=10$을 구한다.	10
2-3	(1) $B_1=\frac{1}{\ln r}\int_1^{r^{20}}\left(x\ln x+\frac{x}{2}\right)dx$ 를 구한다.	15
	(1) $\frac{B_1}{2r^{40}}=5$를 구한다.	15
	(2) $B_m=10r^{40}-\frac{m-1}{2}r^{2m-2}$을 구한다.	10
	(2) $B_1-B_m=\frac{m-1}{2}r^{2m-2}$을 구한다.	10
	(2) $\sum_{m=1}^{20}\left(\frac{B_1-B_m}{r^{2m-2}}\right)=95$를 구한다.	10

자연계열 Ⅰ 3번 예시 답안

【3-1】 (30점)

○ **예시 답안:** $x^2-2P_6x+Q_6=0$의 해의 개수 X는 P_6과 Q_6에 따라 0,1, 그리고 2의 값을 갖는다.

$X=0$이 되는 사건의 조건은 $P_6^2-Q_6<0$이고 이 조건을 만족시키는 순서쌍 (P_6,Q_6)은 (1,2), (1,3), ⋯ , (1,6), (2,5), (2,6)이다. 각 순서쌍이 나올 확률이 $\frac{1}{36}$이므로, $\mathrm{P}(X=0)=\frac{7}{36}$이 된다.

같은 방법으로, $X=1$이 되는 사건의 조건은 $P_6^2-Q_6=0$이고 이를 만족하는 순서쌍 (P_6,Q_6)은 (1,1), (2,4)이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{36}$이 되며, 나머지 $X=2$가 되는 사건의 확률은 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{27}{36}$이 된다.

따라서 확률변수 X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{7}{36}+1\times\frac{2}{36}+2\times\frac{27}{36}=\frac{14}{9}$$

이다.

【3-2】(40점)

○ **예시 답안:** 이차방정식 $x^2-2P_6x+Q_6=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건은 $P_6^2-Q_6>0$이다. 이 조건을 만족시키는 순서쌍 (P_6,Q_6)의 집합을 A라고 하면,

$$\begin{aligned}A=\{&(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ \cdots,\ (3,6),\\ &(4,1),\ \cdots,\ (4,6),\ (5,1),\ \cdots,\ (5,6),\ (6,1),\ \cdots,\ (6,6)\}\end{aligned}$$

이 된다.

서로 다른 두 실근이 존재할 때, 두 근을 α와 β라고 하면, $\alpha+\beta=2P_6$이고 $\alpha\beta=Q_6$이 된다. $|\alpha-\beta|>4 \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2>16$ 이고 $|\alpha-\beta|^2=4P_6^2-4Q_6$이므로, 두 근의 차가 4보다 크게 될 조건은 $4P_6^2-4Q_6>16$, 즉, $Q_6<P_6^2-4$가 된다. 이 조건을 만족시키는 순서쌍 (P_6,Q_6)의 집합을 B라 하면,

$$B=\{(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (4,1),\ \cdots,\ (4,6),\ (5,1),\ \cdots,(5,6),\ (6,1),\ \cdots,(6,6)\}$$

이 된다. 따라서 구하는 확률은 다음의 조건부확률

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{22}{36}}{\frac{27}{36}}=\frac{22}{27}$$

이다.

【3-3】 (50점)

○ **예시 답안:** P_{n^2}과 Q_{n^2}을 각각 P와 Q로 표기하면, P와 Q는 $\frac{1}{n^2}$의 확률로 1부터 n^2까지 자연수의 값을 갖는 확률변수이다. 주어진 함수의 최솟값이 $-P^2+Q$이므로, 문제의 조건은 $-P^2+Q>n$, 즉, $Q>P^2+n$이 된다. 이 조건을 만족시키는 P와 Q는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&P=1\text{일 때, } Q=n+2,\ \cdots,\ n^2\\
&P=2\text{일 때, } Q=n+5,\ \cdots,\ n^2\\
&\qquad\vdots\\
&P=k\text{일 때, } Q=n+k^2+1,\ \cdots,\ n^2\\
&\qquad\vdots\\
&P=n-1\text{일 때, } Q=n+(n-1)^2+1,\ \cdots,\ n^2
\end{aligned}
$$

따라서 $-P^2+Q>n$을 만족시키는 순서쌍 (P,Q)의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-n-k^2)=(n^2-n)(n-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=n(n-1)\left(\frac{2}{3}n-\frac{5}{6}\right)$$

이고 각각의 순서쌍에 주어진 확률이 $\frac{1}{n^4}$이므로,

$$\mathrm{P}(E_n)=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-n-k^2)=\frac{n(n-1)}{n^4}\left(\frac{2}{3}n-\frac{5}{6}\right)$$

이 된다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}n\mathrm{P}(E_n)=\frac{2}{3}$이다.

자연계열 Ⅰ 3번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	실근의 개수에 따른 순서쌍 (P_6, Q_6)을 구한다.	10
	확률변수 X의 확률분포를 구한다.	10
	$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{7}{36} + 1 \times \frac{2}{36} + 2 \times \frac{27}{36} = \frac{14}{9}$을 구한다.	10
3-2	서로 다른 두 실근을 갖게 하는 순서쌍 (P_6, Q_6)을 구한다.	5
	두 근의 차이가 4보다 클 조건 $Q_6 < P_6^2 - 4$을 구한다.	5
	$Q_6 < P_6^2 - 4$을 만족하는 순서쌍 (P_6, Q_6)을 구한다.	10
	조건부확률 $$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{22}{36}}{\frac{27}{36}} = \frac{22}{27}$$ 을 구한다.	20
3-3	$Q > P^2 + n$을 만족하는 순서쌍 (P, Q)를 구한다.	20
	위 조건을 만족시키는 순서쌍 (P, Q)의 개수 $$\sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - n - k^2) = n(n-1)\left(\frac{2}{3}n - \frac{5}{6}\right)$$ 을 구한다.	20
	$\mathrm{P}(E_n) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - n - k^2) = \frac{n(n-1)}{n^4}\left(\frac{2}{3}n - \frac{5}{6}\right)$을 구한다.	5
	$\lim_{n \to \infty}\{n\mathrm{P}(E_n)\} = \frac{2}{3}$을 구한다.	5