2021학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열 Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	16:30 ~ 18:10 (100분)								
지원학과(부)	학과(부, 전공)								감독위원 확인
수 험 번 호									印
성 명									

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열Ⅱ 문제지와 자연계열Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 3쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(3쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) $x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 α로 같으면 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하고 그 값은 α이다. 또한, 그 역도 성립한다.

(나) 함수 $f(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라고 하며, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면

$$f'(a)=0$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

함수

$$f(x)=\begin{cases}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-2)^3 & (x<2)\\ \left(x+\dfrac{2}{3}\right)(x-2)^3+(2-k)(x-2)^2 & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, k는 실수)

【1-1】 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(2)$가 존재함을 보이고, 그 값을 구하시오. (20점)

【1-2】 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 k의 값의 범위는 $k>\alpha$이다. α의 값을 구하시오. (30점)

【1-3】 실수 t에 대하여, x에 대한 방정식 $f(x)=t\ (0\le x\le 3)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 c라 할 때, 두 식

$$\lim_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)+} g(t) - \lim_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)-} g(t) = g\left(-\frac{1}{3}\right),$$

$$\lim_{t\to c+} g(t) - \lim_{t\to c-} g(t) > g(c)$$

를 만족시키는 k의 값의 범위는 $\beta<k<\gamma$이다. β와 γ의 값을 각각 구하시오. (50점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

(a) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(b) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(마) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to INF}a_n=\lim_{n\to INF}b_n=\alpha\ \ (\alpha\text{는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이면

$$\lim_{n\to INF}c_n=\alpha$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=tx$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 t의 값의 범위는 $0<t<\beta$이다. 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=tx$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2라 하고 두 점 P_1, P_2의 x좌표를 각각 a_1, a_2라 하자. (단, $a_1<a_2$) 이때 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 P_1, P_2에서의 두 접선이 만나는 점을 R라 하자.
$0<t<\beta$일 때, 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 β의 값을 구하시오. (15점)

【2-2】 선분 RP_1, 선분 RP_2 및 곡선 $y=\ln x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_t라 하고 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{RP}_2$를 θ_t라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) $|\tan\theta_t|$를 a_1과 a_2로 나타내면 $\dfrac{a_2-a_1}{k+\ell a_1a_2}$이다. $k+\ell$의 값을 구하시오. (단, k, ℓ은 실수) (20점)

(2) S_t를 a_1, a_2, t로 나타내면 $\dfrac{1}{2}(a_2-a_1)(m+nt^2a_1a_2)$이다. $m\times n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 실수) (25점)

【2-3】 (1) $t^{-1}<a_2<t^{-\frac{5}{3}}$임을 증명하시오. (단, $e=2.718\cdots$) (35점)

(2) 점 R의 x좌표 x_t와 【2-2】에서 구한 S_t, θ_t에 대하여

$$\lim_{t\to 0+}\frac{x_t|\tan\theta_t|}{tS_t}$$

의 값을 구하시오. (25점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

이다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

$x \ge 0$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $x > 0$에서 미분가능하고, 음이 아닌 모든 실수 a, b에 대하여 다음 조건 (I)을 만족시킨다.

(I): $m \ge 0,\ n \ge 0,\ m+n > 0$인 모든 실수 m, n에 대하여

$$f\left(\frac{mb+na}{m+n}\right) \le \frac{mf(b)+nf(a)}{m+n}$$

다음 물음에 답하시오.

【3-1】 (1) $0 \le a \le x \le b$일 때

$$f(x) \le \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a)$$

임을 증명하시오. (단, $a < b$) (15점)

(2) 양의 상수 L에 대하여 $t \ge L$일 때

$$f(t) \le \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx \le \frac{1}{4}\left\{f(t-L) + f(t+L) + 2f(t)\right\}$$

임을 증명하시오. (40점)

【3-2】 (1) 다음은 함수 $h(x) = \dfrac{1}{1+(1+x)^2}$이 음이 아닌 모든 실수 a, b에 대하여 조건 (I)을 만족시키는 것을 보이는 과정이다.

$m \ge 0,\ n \ge 0,\ m+n > 0$인 실수 m, n에 대하여 $\dfrac{n}{m+n} = s$로 두면 $0 \le s \le 1$이다.

$$p(s) = sh(a) + (1-s)h(b) - h(sa + (1-s)b)$$

라 하면, $p(0) = \boxed{(ㄱ)}$이고 $p(1) = \boxed{(ㄴ)}$이다. 또한

$$p(s) = \frac{s}{1+(1+a)^2} + \frac{1-s}{1+(1+b)^2} - \frac{1}{1+\{1+sa+(1-s)b\}^2}$$

이므로 $1+a = A$, $1+b = B$로 두면

$$p(s) = \frac{s}{1+A^2} + \frac{1-s}{1+B^2} - \frac{1}{1+\{sA + (1+\boxed{(ㄷ)}\times s)B\}^2}$$

이다.

$$q(s) = p(s)\times(1+A^2)(1+B^2)\left[1+\{sA+(1+\boxed{(ㄷ)}\times s)B\}^2\right]$$

이라 하면, $q(s)$는 s에 대한 다항식이다. $q(s)$를 인수분해하여 정리하면

$$q(s) = (B-A)^2 s(1-s)\{sA^2 + (1-s)B^2 + 2AB - 1\}$$

이다. $A \ge 1$, $B \ge 1$이므로, $q(s) \ge 0$이고 $p(s) \ge 0$이다.

위의 (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)에 알맞은 값을 각각 구하시오. (15점)

(2) $\dfrac{\ell}{25} \le \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(1+x)^2}\,dx < \frac{\ell+1}{25}$을 만족시키는 자연수 ℓ의 값을 구하시오. (30점)

【3-3】 두 양수 L, t에 대하여 수열 $\{c_k\}$의 일반항이

$$c_k = \frac{2^{k-1}}{L}\int_{t-\frac{L}{2^k}}^{t+\frac{L}{2^k}} f(x)\,dx$$

라 하자. 자연수 k에 대하여 $c_{k+1} \le c_k$임을 증명하시오.

(단, $t \ge \dfrac{L}{2}$) (30점)

2021학년도 논술(AAT) 고사(자연계열Ⅱ) 채점 기준 및 예시 답안

자연계열Ⅱ 1번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1]	좌극한 $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ 을 구한다.	5
	우극한 $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ 을 구한다.	5
	$f'(2)=0$ 을 구한다.	10
[1-2]	$f'(x)=\begin{cases}4(x-1)(x-2)^2 & (x<2)\\ 4(x-2)\left\{(x-1)^2-\dfrac{k}{2}\right\} & (x\geq 2)\end{cases}$ 를 구한다.	10
	$\alpha=2$ 를 구한다.	20
[1-3]	함숫값 $f(1)=-\dfrac{1}{3}$, $f(3)=\dfrac{17}{3}-k$ 를 모두 구한다.	10
	$\beta=6$ 을 구한다.	20
	$\gamma=8$ 을 구한다.	20

2. 예시 답안

【1-1】

$f(2)=0$ 이고, $f(x)$ 의 정의에 의해

좌극한 $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{\left(h+\dfrac{4}{3}\right)h^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\left\{\left(h+\dfrac{4}{3}\right)h^2\right\}=0$,

우극한 $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{\left(h+\dfrac{8}{3}\right)h^3+(2-k)h^2}{h}\ \lim\limits_{h\to 0+}\left\{\left(h+\dfrac{8}{3}\right)h^2+(2-k)h\right\}=0$

이 모두 존재하고 그 값이 같다. 따라서, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하고, $f'(2)=0$ 이다.

【1-2】

함수 $f(x)$ 를 범위 $x<2$ 및 $x>2$ 에서 각각 미분하면, 도함수 $f'(x)$ 를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$f'(x)=\begin{cases}4(x-1)(x-2)^2 & (x<2)\\ 4(x-2)\left\{(x-1)^2-\dfrac{k}{2}\right\} & (x\geq 2)\end{cases}$$

따라서, 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖기 위해서는 구간 $(2,\infty)$ 에서 $(x-1)^2-\dfrac{k}{2}$ 의 값의 부호가 음에서 양으로 바뀌어야 한다 (이때, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지게 된다). 즉, 방정식 $(x-1)^2-\dfrac{k}{2}=0$ 이 두 개의 서로 다

른 실근을 갖고 그 중 큰 해가 2보다 커야 하므로, $k>0$ 및 $1+\sqrt{\frac{k}{2}}>2$ 가 성립해야 한다. 이로부터 $k>2$ 일 때만 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가짐을 알 수 있다. 따라서, $\alpha=2$ 이다.

【1-3】

식 $f'(x)=\begin{cases}4(x-1)(x-2)^2 & (x<2)\\ 4(x-2)\left\{(x-1)^2-\dfrac{k}{2}\right\} & (x\geq 2)\end{cases}$ 로부터, 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $k\leq 2$ 일 때 $x=1$ 뿐이고, $k>2$ 일 때 $x=1$ 과 $x=1+\sqrt{\frac{k}{2}}$ 뿐임을 알 수 있다. 또한, $f(0)=\frac{16}{3}$, $f(1)=-\frac{1}{3}$, $f(3)=\frac{17}{3}-k$ 이다. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극솟값을 가지고 $f(1)=-\frac{1}{3}$ 이므로, $\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)+} g(t)-\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)-} g(t)$ 의 값은 아래와 같다.

▷ $2<k<8$ 이고 $f\left(1+\sqrt{\frac{k}{2}}\right)=-\frac{1}{3}$ 일 때, $\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)+} g(t)-\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)-} g(t)=4$

▷ $f(3)=\frac{17}{3}-k=-\frac{1}{3}$ 일 때 (즉, $k=6$ 일 때), $\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)+} g(t)-\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)-} g(t)=1$

▷ 그 외의 경우, $\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)+} g(t)-\lim\limits_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)-} g(t)=2$

$2<k<8$ 이고 $f\left(1+\sqrt{\frac{k}{2}}\right)=-\frac{1}{3}$ 일 때는 $g\left(-\frac{1}{3}\right)=2$ 이고, $k=6$ 일 때는 $g\left(-\frac{1}{3}\right)=3$ 이므로, 이들 경우는 식

$$\lim_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)+} g(t)-\lim_{t\to\left(-\frac{1}{3}\right)-} g(t)=g\left(-\frac{1}{3}\right)\quad\cdots ①$$

을 만족시키지 않는다. 따라서, 식 ①을 만족시키기 위해서는 $g\left(-\frac{1}{3}\right)=2$ 이어야만 한다.

$k<6$ 인 경우는 $f(3)=\frac{17}{3}-k>-\frac{1}{3}$ 이므로, $g\left(-\frac{1}{3}\right)=2$ 가 되기 위해서는 $f\left(1+\sqrt{\frac{k}{2}}\right)=-\frac{1}{3}$ 이어야만 한다. 그러나 이 경우는 위에서 식 ①을 만족시키지 않음을 보였으므로, $k<6$ 인 경우는 식 ①을 만족시키지 않는다.

$k>6$ 인 경우는 $f(3)=\frac{17}{3}-k<-\frac{1}{3}$ 이므로, $g\left(-\frac{1}{3}\right)=2$ 이다. 따라서, 식 ①을 만족시키기 위해서는 $k>6$ 이어야 한다.

또한, $k>6$ 인 경우 $g(c)=1$ 이며, $1+\sqrt{\frac{k}{2}}<3$ 일 때 $\lim\limits_{t\to c+}g(t)-\lim\limits_{t\to c-}g(t)=2$ 이고, $1+\sqrt{\frac{k}{2}}\geq 3$ 일 때 $\lim\limits_{t\to c+}g(t)-\lim\limits_{t\to c-}g(t)=1$ 이다. 따라서, $k>6$ 인 경우 식

$$\lim_{t\to c+}g(t)-\lim_{t\to c-}g(t)>g(c)\quad\cdots ②$$

를 만족시키기 위해서는 $k<8$ 이어야 한다.

종합하면, 두 식 ①, ②를 만족시키는 k의 값의 범위는 $6<k<8$ 이다. 따라서, $\beta=6$, $\gamma=8$ 이다.

자연계열Ⅱ 2번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
【2-1】	$\beta=\dfrac{1}{e}$ 를 구하면 15점	15
【2-2】 (1)	$\tan\theta_t=\tan\left(\theta_1+\theta_2+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 를 구하면 5점 $\tan\theta_1=a_1$ 를 구하면 5점 $\tan\theta_2=\dfrac{1}{a_2}$ 를 구하면 5점 $k+\ell=2$ 를 구하면 5점	20
【2-2】 (2)	접선의 방정식이 각각 $y=\dfrac{1}{a_1}x+ta_1-1$, $y=\dfrac{1}{a_2}x+ta_2-1$ 임을 구하면 5점 $S_t=\displaystyle\int_{a_1}^{ta_1a_2}\left(\frac{1}{a_1}x+ta_1-1\right)dx+\int_{ta_1a_2}^{a_2}\left(\frac{1}{a_2}x+ta_2-1\right)dx-\int_{a_1}^{a_2}\ln x\,dx$ 임을 구하면 5점 $m\times n=-1$ 를 구하면 15점	25
【3-3】	함수 $f(x)=\ln x-tx$ 의 그래프 개형을 파악하면 5점 $t^{-1}<a_2$ 를 보이면 10점 $a_2<t^{-\frac{5}{3}}$ 를 보이면 20점	35

2. 예시 답안

【2-1】 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=\ln x$ 가 접한다고 하자. 접점을 $(\alpha, t\alpha)=(\alpha, \ln\alpha)$ 라고 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{\alpha}=t$ 이다. 따라서 $\ln\alpha=1$ 이므로 $\alpha=e$ 이다. 즉 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=\ln x$ 가 두 점에서 만날 t 의 범위는 $0<t<\dfrac{1}{e}$ 이고 β 는 $\dfrac{1}{e}$ 이다.

【2-2】 (1) 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=\ln x$ 가 만나는 두 점은 각각 $(a_1, ta_1)=(a_1, \ln a_1)$, $(a_2, ta_2)=(a_2, \ln a_2)$ 이다. P_1 에서 접하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{a_1}x+ta_1-1$ 이고 P_2 에서 접하는 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{a_2}x+ta_2-1$ 이기 때문에 두 접선이 만나는 점 R 의 좌표는 $(ta_1a_2, t(a_1+a_2)-1)$ 이다.

점 $Q_1(ta_1a_2, ta_1)$ 과 점 $Q_2(a_2, t(a_1+a_2)-1)$ 에 대하여 $\theta_1=\angle P_1RQ_1$, $\theta_2=\angle P_2RQ_2$ 라 두면 $\tan\theta_t=\tan\left(\theta_1+\theta_2+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 이다. 그러면 $\tan\theta_1=a_1$ 이고 $\tan\theta_2=\dfrac{1}{a_2}$ 이다. 따라서

$$|\tan\theta_t|=\left|\frac{\tan\theta_1\tan\theta_2-1}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}\right|=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$$

이므로 $k=1$, $\ell=1$ 이고 $k+\ell=2$ 이다.

(2) 두 접선이 만나는 점 R 의 좌표는 $(ta_1a_2, t(a_1+a_2)-1)$ 이므로

$$S_t=\int_{a_1}^{ta_1a_2}\left(\frac{1}{a_1}x+ta_1-1\right)dx+\int_{ta_1a_2}^{a_2}\left(\frac{1}{a_2}x+ta_2-1\right)dx-\int_{a_1}^{a_2}\ln x\,dx=\frac{1}{2}(a_2-a_1)(1-t^2a_1a_2)$$

이다. 따라서 $m=1$, $n=-1$ 이므로 $m\times n=-1$ 이다.

【2-3】

(1) 함수 $f(x)=\ln x-tx$ 을 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-t$ 이기 때문에 f는 $x=\dfrac{1}{t}$ 에서 최댓값을 갖고 이때 함숫값은 $f(t^{-1})=-\ln t-1>0$ 이다. $t^{-1}<t^{-\frac{5}{3}}$ 이고 $f\left(t^{-\frac{5}{3}}\right)=-t^{\frac{-2}{3}}\left(\dfrac{5}{3}t^{\frac{2}{3}}\ln t+1\right)$ 이다.

$g(s)=\dfrac{5}{3}s^{\frac{2}{3}}\ln s+1$ 라 두면 $g'(s)=\dfrac{5}{3}s^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}ln s+1\right)$ 이기 때문에 $s=e^{-\frac{3}{2}}$ 에서 최솟값을 갖는다.

$g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=-\dfrac{5}{2e}+1>0$ 이기 때문에 모든 $s>0$ 에 대하여 $g(s)>0$ 이다. 즉 $t^{-1}<a_2<t^{-\frac{5}{3}}$ 이다.

(2) 함수 $f(x)=\ln x-tx$ 는 a_1과 a_2에서 근을 갖고 $1<a_1<e$ 이다. 【2-2】의 (1), (2)에 의해

$\dfrac{x_t|\tan\theta_t|}{tS_t}=\dfrac{2a_1a_2}{(1-t^2a_1a_2)(1+a_1a_2)}$ 이다.

$1<a_1<e$ 이고 $t^{-1}<a_2<t^{-\frac{5}{3}}$ 이기 때문에 $t^{-1}<a_1a_2<e\,t^{-\frac{5}{3}}$ 이다. 즉 $\lim\limits_{t\to 0+}t^2a_1a_2=0$ 이고 $\lim\limits_{t\to 0+}a_1a_2=\infty$ 이므로 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{x_t|\tan\theta_t|}{tS_t}=2$ 이다.

자연계열Ⅱ 3번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
【3-1】 (1)	$n=\dfrac{b-x}{b-a}$로 두었으면 5점	15
	$m=\dfrac{x-a}{b-a}$로 두었으면 5점	
	$m \ge 0,\ n \ge 0,\ m+n=1$을 확인하였으면 5점	
【3-1】 (2)	$\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx \le \dfrac{1}{4}\{f(t-L)+f(t+L)+2f(t)\}$의 증명이 올바르면 20점	40점
	$f(t) \le \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx$의 증명이 올바르면 20점	
【3-2】 (1)	답 (ㄱ)$=0$, (ㄴ)$=0$, (ㄷ)$=-1$ 이 맞으면 각 5점	15점
【3-2】 (2)	$\displaystyle\int_0^2 \dfrac{1}{1+(1+x)^2}\,dx < B_1$ 인 B_1을 $\dfrac{12}{25}$보다 작거나 같게 구했으면 10점	30
	$\displaystyle\int_0^2 \dfrac{1}{1+(1+x)^2}\,dx \ge B_2$ 인 B_2를 $\dfrac{11}{25}$보다 크거나 같게 구했으면 10점	
	답 $\ell=11$이 맞으면 10점	
【3-3】	증명이 올바르면 30점	30

2. 예시 답안

【3-1】

(1) $0 \le a \le x \le b$ 이므로 $n=\dfrac{b-x}{b-a},\ m=\dfrac{x-a}{b-a}$로 두면 $m \ge 0,\ n \ge 0,\ m+n=1$ 이다. 조건 (I)로부터 $f(x) \le \dfrac{b-x}{b-a}f(a)+\dfrac{x-a}{b-a}f(b)$ 이다.

【3-2】 (2) $\dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx \le \dfrac{1}{4}\{f(t-L)+f(t+L)+2f(t)\}$ 의 증명:

$t-L \le x \le t$에 대하여, $a=t-L, b=t,\ n=\dfrac{b-x}{b-a},\ m=\dfrac{x-a}{b-a}$로 두면 **【3-1】** (1) 의 결과로부터

$f(x) \le \left\{\dfrac{b-x}{b-a}f(a)+\dfrac{x-a}{b-a}f(b)\right\}$ 이므로 $\displaystyle\int_{t-L}^{t} f(x)\,dx \le \int_{t-L}^{t}\left\{\dfrac{b-x}{b-a}f(a)+\dfrac{x-a}{b-a}f(b)\right\}dx$

이다. 즉, $\displaystyle\int_{t-L}^{t} f(x)\,dx \le \dfrac{L}{2}\{f(t)+f(t-L)\}$ 이다. $t \le x \le t+L$ 에 대하여 $a=t,\ b=t+L,$

$n = \dfrac{b-x}{b-a}$, $m = \dfrac{x-a}{b-a}$ 로 두면 $\displaystyle\int_{t}^{t+L} f(x)\,dx \le \frac{L}{2}\{f(t+L)+f(t)\}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx \le \frac{1}{4}\{f(t-L)+f(t+L)+2f(t)\}$ 이다.

$\displaystyle f(t) \le \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx$ 의 증명:

$0 \le x \le L$인 실수 x에 대하여 조건 (I)로부터 $f(t) \le \dfrac{1}{2}\{f(t-x)+f(t+x)\}$ 이므로

$\displaystyle f(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,dx \le \frac{1}{2L}\int_{0}^{L}\{f(t-x)+f(t+x)\}\,dx$ 이고 치환적분을 이용하면

$\displaystyle \frac{1}{2L}\int_{0}^{L}\{f(t-x)+f(t+x)\}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{t-L}^{t+L} f(x)\,dx$ 이다.

【3-3】 $t - \dfrac{L}{2^{k+1}} \le x \le t + \dfrac{L}{2^{k+1}}$인 실수 x에 대하여 조건 (I)로부터

$f(x) \le \dfrac{1}{2}\left\{f\left(x - \dfrac{L}{2^{k+1}}\right) + f\left(x + \dfrac{L}{2^{k+1}}\right)\right\}$ 이다. 따라서

$$c_{k+1} = \frac{2^k}{L}\int_{t-\frac{L}{2^{k+1}}}^{t+\frac{L}{2^{k+1}}} f(x)\,dx \le \frac{2^{k-1}}{L}\int_{t-\frac{L}{2^{k+1}}}^{t+\frac{L}{2^{k+1}}}\left\{f\left(x-\frac{L}{2^{k+1}}\right)+f\left(x+\frac{L}{2^{k+1}}\right)\right\}dx = \frac{2^{k-1}}{L}\int_{t-\frac{L}{2^{k}}}^{t+\frac{L}{2^{k}}} f(x)\,dx = c_k$$

이다. (치환적분을 이용)