2021학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열 I 문제지

시 험 시 간	15:30 ~ 17:10 (100분)		
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인	
수 험 번 호		印	
성 명			

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열 I 문제지와 자연계열 I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 3쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(3쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다. (단, a, b, c는 상수이고, $a^2+b^2 \neq 0$이다.)

(나) $a \le x \le b$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 세 가지 성질을 만족할 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

(a) $f(x) \ge 0$

(b) $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.

(c) $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)$는 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $a \le \alpha \le \beta \le b$)

(다) 연속확률변수 X가 특정한 값을 가질 확률은 0이므로

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(a \le X \le b)=\mathrm{P}(a \le X < b)\\&=\mathrm{P}(a < X \le b)=\mathrm{P}(a < X < b)\end{aligned}$$

가 성립한다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대・최소 정리에 의하여 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서 $f(x)$의 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(마) 두 사건 A와 B에 대하여 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

이다. (단, $\mathrm{P}(A)>0$)

(바) 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

확률변수 X의 기댓값은

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

$0 \le k \le 3$인 실수 k에 대하여 연속확률변수 M이 갖는 값의 범위는 $-4 \le M \le 4$이고, M의 확률밀도함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{4(k+4)} & (-4 \le x \le k)\\[2ex] \dfrac{x-4}{4(k-4)} & (k < x \le 4)\end{cases}$$

이다. 직선 $y=\dfrac{M}{2}x$와 원 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=9$이 서로 다른 두 점에서 만날 확률이 최대가 되도록 하는 k의 값은 c이다. $k=c$일 때 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 직선 $y=\dfrac{M}{2}x$와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 M의 값의 범위는 $\alpha < M < \beta$이다. $3(\beta-\alpha)$의 값을 구하시오. (20점)

【1-2】 $c=2$임을 증명하시오. (40점)

【1-3】 직선 $y=\dfrac{M}{2}x$와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점과 원 C의 중심이 한 직선 위에 있거나 만나는 두 점과 원 C의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 둔각삼각형이 될 확률은 $\dfrac{n}{m}$이다. $m+n$의 값을 구하시오.
(단, m, n은 서로소인 자연수) (30점)

【1-4】 함수

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x \le 0)\\1 & (0 < x \le 1)\\2 & (1 < x \le 2)\\3 & (x > 2)\end{cases}$$

와 확률변수 M에 대하여 부등식 $y \ge \dfrac{g(M)}{2}x$가 나타내는 영역과 부등식 $(x-2)^2+(y-1)^2 \le 9$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 확률변수 S라 할 때, $\mathrm{E}(S)$의 값은 $a\pi+b$이다. $192(a+b)$의 값을 구하시오. (단, 두 영역의 공통부분이 없을 때 $S=0$이고, a와 b는 유리수이다.) (30점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 명제 $p \to q$의 참, 거짓과 그 대우 $\sim q \to \sim p$의 참, 거짓은 일치한다.

(나) $x=a$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 α로 같으면 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재하고 그 값은 α이다. 또한, 그 역도 성립한다.

(다) 함수 $f(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

실수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. (단, $a<4$)

> (ㄱ) 모든 실수 x에 대하여, $f(a+x) \neq 0$이면
> $$f(a+x)f(a-x)<0$$
> 이다.
> (ㄴ) $f(4)=0$

다음 물음에 답하시오.

【2-1】 집합 $\{x \mid x>0 \text{이고 } f(x)=0\}$의 원소의 개수를 $n(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a \to 2+} n(a)$와 $\lim\limits_{a \to 2-} n(a)$의 값을 각각 구하시오. (40점)

【2-2】 $\int_0^2 f(x)\,dx$가 최대일 때, $3a$의 값을 구하시오. (30점)

【2-3】 함수 $g(x)=|f(x)f(-x)|$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $a=2$일 때, 함수 $g(x)$가 $x=b$에서 <u>미분가능하지 않은</u> 모든 b의 값을 구하시오. (20점)

(2) $a=0$이고, 실수 k에 대하여 방정식

$$\frac{g(x)}{(x+4)^2}=kx \quad (x \neq -4)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, $\frac{27}{16}k$의 값을 구하시오.

(20점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

(나) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

이다.

(다)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(라) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【3-1】 $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$의 값을 구하시오. (20점)

【3-2】 연속함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) = g(x+2\pi)$$

를 만족시킬 때, 함수 $h(x) = \int_{x-2\pi}^{x} g(t)\,dt$가 상수함수임을 증명하시오. (20점)

【3-3】 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> (ㄱ) $f'(x) = f'(x+2\pi)$
> (ㄴ) $f(x) = \left(\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt\right)^2 - \cos x + \alpha$ (단, α는 상수)

다음 물음에 답하시오.

(1) $\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt$의 값을 구하시오. (40점)

(2) $f(0) = 1$일 때, 상수 α의 값을 구하시오. (40점)

2021학년도 논술(AAT) 고사(자연계열Ⅰ) 채점 기준 및 예시 답안

자연계열Ⅰ 1번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
【1-1】	$\dfrac{\lvert 1-M\rvert}{\sqrt{1+\dfrac{M^2}{4}}}<1$ 를 유도하면 10점 $0<M<\dfrac{8}{3}$ 를 구하면 20점	20
【1-2】	$h(k)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{2}{4+k}+\dfrac{2}{9(4-k)}\right) & \left(0\le k\le \dfrac{8}{3}\right)\\ \dfrac{32}{9(k+4)} & \left(\dfrac{8}{3}<k\le 3\right)\end{cases}$ 를 구하면 20점 (또는 $h(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{k}{2(k+4)}+\dfrac{8-3k}{18(4-k)} & \left(0\le k\le \dfrac{8}{3}\right)\\ \dfrac{32}{9(k+4)} & \left(\dfrac{8}{3}<k\le 3\right)\end{cases}$) $h'(k)=\dfrac{16(k-2)(k-8)}{9(k-4)^2(k+4)^2}$ 를 유도하면 30점 그래프의 개형을 이용하여 $c=2$ 임을 보이면 40점	40
【1-3】	직선 $y=\dfrac{M}{2}x$ 와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만나는 사건의 확률을 구하면 5점 $\dfrac{\lvert 1-M\rvert}{\sqrt{1+\dfrac{M^2}{4}}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 을 유도하면 15점 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7}<M<2\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7}\le M\le 2\right)=\dfrac{18}{49}$ 을 구하면 25점 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{162}{245}$ 을 구하면 30점	30
【1-4】	S는 $0, \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \pi$ 를 갖는 이산확률변수가 됨을 보이면 15점 $\mathrm{P}(S=0)=\mathrm{P}(g(M)=3)=\mathrm{P}(M>2)=\mathrm{P}(M\ge 2)=\dfrac{1}{4}$ $\mathrm{P}\left(S=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{P}(g(M)=2)=\mathrm{P}(1<M\le 2)=\mathrm{P}(1\le M\le 2)=\dfrac{11}{48}$ $\mathrm{P}\left(S=\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{P}(g(M)=1)=\mathrm{P}(0<M\le 1)=\mathrm{P}(0\le M\le 1)=\dfrac{9}{48}$ $\mathrm{P}(S=\pi)=\mathrm{P}(g(M)=0)=\mathrm{P}(M\le 0)=\dfrac{1}{3}$ 임을 보이면 25점 $\mathrm{E}(S)=0\times\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{11}{48}+\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{9}{48}+\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{31}{64}\pi-\dfrac{11}{96}$ 을 구하면 30점	30

2. 예시 답안

【1-1】

직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 원 C의 중심 $(2,1)$ 과의 거리가 반지름의 길이 1보다 작아야 한다. 즉, 제시문 (가)에 의하여

$$\frac{|1-M|}{\sqrt{1+\frac{M^2}{4}}}<1$$

이고, 이 부등식을 풀면 $0<M<\frac{8}{3}$ 을 얻는다. 따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은 $\frac{8}{3}$이므로, 구하는 값은 8이다.

【1-2】

직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만날 확률은

$$\mathrm{P}\left(0<M<\frac{8}{3}\right)=\mathrm{P}\left(0\le M\le\frac{8}{3}\right)$$

이다. 이 확률을 $h(k)$라 하면,

$$h(k)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{2}{4+k}+\dfrac{2}{9(4-k)}\right) & \left(0\le k\le\dfrac{8}{3}\right)\\[2ex] \dfrac{32}{9(k+4)} & \left(\dfrac{8}{3}<k\le 3\right)\end{cases}$$

이다. $0<k<\frac{8}{3}$ 에서 함수 $h(k)$의 도함수는

$$h'(k)=\frac{16(k-2)(k-8)}{9(k-4)^2(k+4)^2}$$

이므로, 닫힌구간 $\left[0,\frac{8}{3}\right]$ 에서 함수 $h(k)$는 $k=2$에서 극댓값을 갖는다. 또한 $\frac{8}{3}<k\le 3$ 에서 함수 $h(k)$는 감소하므로, 함수 $h(k)$는 $k=2$에서 최댓값을 갖는다.

참고

$h(k)$를 구할 때, 구하는 부분의 넓이를 두 사다리꼴의 합으로 구하는 경우 함수 $h(k)$는

$$h(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{k}{2(k+4)}+\dfrac{8-3k}{18(4-k)} & \left(0\le k\le\dfrac{8}{3}\right)\\[2ex] \dfrac{32}{9(k+4)} & \left(\dfrac{8}{3}<k\le 3\right)\end{cases}$$

이다.

【1-3】

직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만나는 사건을 A, 두 교점과 점 $(2,1)$이 한 직선 위에 있거나 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 둔각삼각형이 되는 사건을 B라고 하자. 그러면, 사건 A가 일어날 확률은 $0<M<\frac{8}{3}$ 일 확률과 같으므로, $\mathrm{P}(A)=h(2)=\frac{5}{9}$ 가 된다.

위 세 점이 삼각형을 이루는 경우 이 삼각형은 두 변의 길이가 1인 이등변삼각형이 된다. 이때 직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 점$(2,1)$과의 거리가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 직각삼각형이 되므로, 직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 점$(2,1)$과의 거리가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 보다 작으면, 두 교점과 점 $(2,1)$이 한 직선에 있거나 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 둔각삼각형이 된다. 즉,

$$\frac{|1-M|}{\sqrt{1+\frac{M^2}{4}}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이고, 이 부등식을 풀면 $\frac{2}{7}<M<2$ 를 얻는다. 따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{7}<M<2\right)=\mathrm{P}\left(\frac{2}{7}\le M\le 2\right)=\frac{18}{49}$$

이므로, 구하는 확률은 다음의 조건부확률

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{162}{245}$$

가 된다. 따라서 $m=162$ 이고 $n=245$ 이므로 $m+n=407$ 이다.

참고

직선 $y=\frac{M}{2}x$ 와 원 C가 두 점에서 만날 때, 두 교점을 $\left(\alpha,\frac{M}{2}\alpha\right)$와 $\left(\beta,\frac{M}{2}\beta\right)$라 하자. 두 교점과 점 $(2,1)$이 한 직선 위에 있거나 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 둔각삼각형이 되기 위해서는 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 보다 커야 하므로

$$(\alpha-\beta)^2+\left(\frac{M}{2}\alpha-\frac{M}{2}\beta\right)^2=\left(\frac{M^2}{4}+1\right)(\alpha-\beta)^2>2$$

가 성립한다. 여기서, α와 β는 연립방정식 $y=\frac{M}{2}x$ 와 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 의 해가 되므로, α와 β는 이차방정식

$$(x-2)^2+\left(\frac{M}{2}x-1\right)^2=1$$

의 서로 다른 두 근이 된다. 이 식을 정리하면,

$$\left(\frac{M^2}{4}+1\right)x^2-(M+4)x+4=0$$

이 되므로 $\alpha+\beta=\dfrac{M+4}{\frac{M^2}{4}+1}$ 이고 $\alpha\beta=\dfrac{4}{\frac{M^2}{4}+1}$ 가 된다. 따라서

$$\left(\frac{M^2}{4}+1\right)(\alpha-\beta)^2\left(\frac{M^2}{4}+1\right)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=\frac{(M+4)^2}{\frac{M^2}{4}+1}-16>2$$

이므로, 마지막 M에 대한 부등식을 풀면 $\frac{2}{7}<M<2$ 을 얻는다.

【1-4】

함수 $g(x)$는 $0,1,2,3$ 의 값을 가지므로, 넓이 S는 $g(M)=0$ 일 때 $S=\pi$, $g(M)=1$ 일 때 $S=\frac{\pi}{2}$, $g(M)=2$ 일 때 $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, 그리고 $g(M)=3$ 일 때 $S=0$을 갖는다. 즉, 넓이 S는 $0,\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\frac{\pi}{2},\pi$ 를 갖는 이산확률변수가 되며, 이때 각각의 확률은

$$\mathrm{P}(S=0)=\mathrm{P}(g(M)=3)=\mathrm{P}(M>2)=\mathrm{P}(M\ge 2)=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}\left(S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}(g(M)=2)=\mathrm{P}(1<M\le 2)=\mathrm{P}(1\le M\le 2)=\frac{11}{48}$$

$$\mathrm{P}\left(S=\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{P}(g(M)=1)=\mathrm{P}(0<M\le 1)=\mathrm{P}(0\le M\le 1)=\frac{9}{48}$$

$$\mathrm{P}(S=\pi)=\mathrm{P}(g(M)=0)=\mathrm{P}(M\le 0)=\frac{1}{3}$$

이 된다. 따라서 확률변수 S의 기댓값

$$\mathrm{E}(S)=0\times\frac{1}{4}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{11}{48}+\frac{\pi}{2}\times\frac{9}{48}+\pi\times\frac{1}{3}=\frac{31}{64}\pi-\frac{11}{96}$$

이므로, $a=\dfrac{31}{64}$ 이고 $b=-\dfrac{11}{96}$ 이다. 따라서 $192(a+b)$ 의 값은 71 이다.

자연계열Ⅰ 2번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$f(x)=\{x-(2a-4)\}(x-a)(x-4)$ 를 구하면	20
	$n(a)$ 를 구하면	14
	$\lim_{a\to 2+} n(a)=3,\ \lim_{a\to 2-} n(a)=2$ 를 구하면	6
2	$\int_0^2 f(x)\,dx = -12\left(a-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$ 를 구하면	25
	$3a=5$ 를 구하면	5
3	(1) $g(x)=\lvert f(x)f(-x)\rvert = x^2\lvert x-4\rvert\lvert x-2\rvert\lvert x+2\rvert\lvert x+4\rvert$ 를 구하면	12
	(1) $b=4, 2, -2, -4$ 를 구하면	8
	(2) $h(x_0)=x_0(x_0-4)^2-k=0$ 를 구하면	5
	(2) $h'(x_0)=2x_0(x_0-4)+(x_0-4)^2=0$ 를 구하면	5
	(2) $x_0=\frac{4}{3}$ 를 구하면	5
	(2) $\frac{27}{16}k$ 의 값을 구하면	5

2. 예시 답안

【2-1】 조건 (ㄱ)에서 $x=0$ 이고 $f(a)\neq 0$ 이면 $\{f(a)\}^2<0$ 이므로 모순이다. 즉 $f(a)=0$ 이다.
조건 (ㄱ)에서 $x=a-4$ 이면 조건 (ㄴ)에 의하여 $f(a+x)f(a-x)=f(2a-4)f(4)=0$ 이므로 대우 명제에 의하여 $f(2a-4)=f(a+x)=0$ 이다.
따라서 $f(x)=\{x-(2a-4)\}(x-a)(x-4)$ 이고 $2a-4<a<4$ 이다.

$$n(a)=\begin{cases}1 & (a\le 0)\\ 2 & (0<a\le 2)\\ 3 & (2<a<4)\end{cases}$$

이므로

$$\lim_{a\to 2+} n(a)=3,\ \lim_{a\to 2-} n(a)=2$$

이다.

【2-2】

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 \{x-(2a-4)\}(x-a)(x-4)dx \\ &= \int_0^2 \{x-(2a-4)\}\{x^2-(a+4)x+4a\}dx \\ &= \int_0^2 \{x^3-(a+4)x^2+4ax-(2a-4)x^2+(2a-4)(a+4)x-4a(2a-4)\}dx \\ &= 4-\frac{8}{3}(a+4)+8a-\frac{8}{3}(2a-4)+2(2a-4)(a+4)-8a(2a-4) \\ &= -12a^2+40a-28 = -12\left(a-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{16}{3}\end{aligned}$$

이므로 $a=\frac{5}{3}$ 일 때 최대이므로 $3a=5$ 이다.

【2-3】 $g(x)=|f(x)f(-x)|=|\{x-(2a-4)\}(x-a)(x-4)\{x+(2a-4)\}(x+a)(x+4)|$ 이고

$$2a-4<a<4,\ \ -4<-a<-(2a-4)$$

이다.

(1) $a=2$ 이면 $g(x)=|f(x)f(-x)|=x^2|x-4||x-2||x+2||x+4|$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=b=4, 2, -2, -4$ 에서 미분가능하지 않다.

(2) $a=0$ 이므로

$$g(x)=x^2(x-4)^2(x+4)^2$$

이다.

방정식 $\frac{g(x)}{(x+4)^2}=kx\ (x\neq-4)$ 가 $x=0$ 을 포함한 서로 다른 세 실근을 가지므로 $k\neq0$ 이고 방정식 $x(x-4)^2=k$ 는 $0, -4$ 가 아닌 서로 다른 두 실근 x_1, x_2 를 갖는다. 여기서 $h(x)=x(x-4)^2-k$ 로 두면, $h(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)$ 이거나 $h(x)=(x-x_1)(x-x_2)^2$ 이다. 따라서 $h(x)$ 는 두 점 x_1, x_2 중 한 점 x_0 에서 다음을 만족시킨다.

$$h(x_0)=0 \text{ 이고 } h'(x_0)=0$$

즉

$$h(x_0)=x_0(x_0-4)^2-k=0 \text{ 이고 } h'(x_0)=2x_0(x_0-4)+(x_0-4)^2=0$$

이다.

두 번째 식으로부터 $x_0=4$ 이거나 $x_0=\frac{4}{3}$ 이다. 그러나 $h(4)=-k\neq0$ 이므로 $x_0=\frac{4}{3}$ 이다.

또한 $0=h(x_0)=h\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^2-k$ 이므로

$$\frac{27}{16}k=\frac{27}{16}\times\frac{4}{3}\times\frac{64}{9}=16$$

이다.

자연계열Ⅰ 3번 문항 채점 기준 및 답안

1. 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$ 임을 유도하면	10점
	$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi$ 을 구하면	10점
2	$h(x) = \int_c^x g(t)\,dt - \int_c^{x-2\pi} g(t)\,dt$ 임을 보이면	10점
	$h'(x) = 0$ 임을 증명하면	10점
3-1	$\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} f'(u)\cos(x-u)\,du$ 임을 유도하면	10점
	$\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt = \cos x \int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du + \sin x \int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du$ 임을 유도하면	5점
	$f'(x) = -2AB\sin^2 x + 2(B^2 - A^2)\sin x\cos x + 2AB\cos^2 x + \sin x$ 을 구하면	10점
	$\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt = \pi$ 임을 구하면	15점
3-2	$\int_0^{2\pi} f'(t)\cos t\,dt = -2AB\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\,dt + 2(B^2-A^2)\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t\,dt + 2AB\int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt + \int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,dt$ 을 구하면	10점
	$A = 0$ 을 구하면	10점
	$f(x) = (\pi\sin x)^2 - \cos x + \alpha$ 임을 구하면	10점
	$\alpha = 2$ 를 구하면	10점

2. 예시 답안

【3-1】

$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = [-\sin x\cos x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 x)\,dx$ 이므로 $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \pi$ 이다.

【3-2】

구간 $[x-2\pi, x]$에 속하는 상수 c에 대하여

$h(x)=\int_{x-2\pi}^{x} g(t)\,dt=\int_{c}^{x} g(t)\,dt+\int_{x-2\pi}^{c} g(t)\,dt=\int_{c}^{x} g(t)\,dt-\int_{c}^{x-2\pi} g(t)\,dt$ 이다.

이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $h'(x)=g(x)-g(x-2\pi)=0$ 이다.

따라서, 함수 $h(x)$는 상수함수이다.

【3-3】

(1) 정적분 $\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt$ 에서 $x-t=u$ 로 놓으면 $(-1)\dfrac{dt}{du}=1$ 이고, $t=0$일 때 $u=x$, $t=2\pi$일 때 $u=x-2\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f'(x-t)\cos t\,dt &= -\int_{x}^{x-2\pi} f'(u)\cos(x-u)\,du\\ &=\int_{x-2\pi}^{x} f'(u)(\cos x\cos u+\sin x\sin u)\,du\\ &=\int_0^{2\pi} f'(u)(\cos x\cos u+\sin x\sin u)\,du\\ &=\cos x\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du+\sin x\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du\end{aligned}$$

이다.

이때, 정적분 $\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du$, $\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du$ 는 상수이므로 각각 $A=\int_0^{2\pi} f'(u)\cos u\,du$, $B=\int_0^{2\pi} f'(u)\sin u\,du$ 라 두자.

그러면 조건 (ㄴ)으로부터 등식 $f(x)=(A\cos x+B\sin x)^2-\cos x+\alpha$ 을 얻을 수 있고, 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(A\cos x+B\sin x)(-A\sin x+B\cos x)+\sin x\\ &=-2AB\sin^2 x+2(B^2-A^2)\sin x\cos x+2AB\cos^2 x+\sin x\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned}B&=\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt\\ &=\int_0^{2\pi}\{-2AB\sin^3 t+2(B^2-A^2)\sin^2 t\cos t+2AB\sin t\cos^2 t+\sin^2 t\}\,dt\\ &=-2AB\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt+2(B^2-A^2)\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt+2AB\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt\end{aligned}$$

삼각함수의 치환 적분을 이용하면 $\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\,dt=0$ 이다.

따라서, $B=\int_0^{2\pi} f'(t)\sin t\,dt=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\pi$.

(2)

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} f'(t)\cos t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \{-2AB\sin^2 t\cos t + 2(B^2 - A^2)\sin t\cos^2 t + 2AB\cos^3 t + \sin t\cos t\}\, dt \\
&= -2AB\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\, dt + 2(B^2 - A^2)\int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t\, dt + 2AB\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \sin t\cos t\, dt
\end{aligned}
$$

삼각함수의 치환 적분을 이용하면

$\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t\cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t\cos t\, dt = 0$ 이다.

즉, $A = 0$ 이고, 따라서 $f(x) = (\pi\sin x)^2 - \cos x + \alpha$ 이다.

이때, $f(0) = 1$ 이므로 $\alpha = 2$ 이다.