2020학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열Ⅱ 문제지와 자연계열Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음,
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4) 실수 c가 닫힌 구간 $[a, b]$에 포함될 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

이다.

(나)

(1) $1+2+3+ \cdots +n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(다) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 미분가능한 함수 $x = g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

이다. (단, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$)

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

함수 $f(x) = |\pi\sin(\pi x)|$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = f(x+k)$$

임을 증명하시오. (단, k는 정수이다.) (20점)

【1-2】 $\sum_{j=0}^{9}\int_0^{2j+1} 2xf(x)dx$의 값을 구하시오. (30점)

【1-3】 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여

$$\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx = a + bk + ck^2 + dk^3$$

을 만족시키는 상수 a, b, c, d의 값을 각각 구하시오. (30점)

【1-4】 일반항이 $a_n = \frac{1}{n^4}\int_0^{n^2} 2xf(x)dx$인 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구하시오. (40점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 반지름의 길이가 r이고 중심이 (a, b)인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

이다.

(나)

(1) 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이다.

(2) 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부이다.

(다) 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 주어질 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 이동거리 s는

$$s=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 4인 원을 C라 하자. 두 점 $\mathrm{Q}_1(2, 0)$, $\mathrm{Q}_2(8, 0)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 다음 조건을 만족시키는 점 A가 나타내는 부분을 영역 F_1이라 하자.

<조건>

중심이 A인 원이 점 Q_1을 내부에 포함하고 원 C의 내부에 있다.

영역 F_1의 경계선 위에 있는 점의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 모두 구하시오. (50점)

【2-2】 다음 조건을 만족시키는 점 B가 나타내는 부분을 영역 F_2라 하자.

<조건>

중심이 B인 원이 점 Q_2를 내부에 포함하고 C의 외부에 있다.

원점을 지나면서 기울기가 0 이상이고 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 임의의 직선이 영역 F_2의 경계선과 만나는 점을 P_2라 하자. 선분 $\overline{\mathrm{OP}_2}$와 문제 【2-1】에서 정의한 영역 F_1의 경계선이 만나는 점을 P_1이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1} : \overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2} = \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}} : \overline{\mathrm{PP}_2}$$

를 만족하는 선분 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ 위의 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하시오. (60점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, $f'(x)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

이를 함수 $f(x)$의 이계도함수라 하고, 이것을 기호 $f''(x)$와 같이 나타낸다.

(나) 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$의 근이 α, β일 때,

$$p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(라) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$, $h(x)$와 세 실수 a,b,c $(a<b<c)$에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

【3-1】 (1) 세 점 $(a,f(a))$, $(b,0)$, $(c,0)$은 이차함수 $y=q_1(x)$의 그래프 위의 점일 때

$$q_1(x)=\frac{f(a)(x-b)(x-c)}{(a+\boxed{①}b)(\boxed{②}a+\boxed{③}c)}$$

이다. ①, ②, ③에 알맞은 값을 각각 구하시오. (15점)

(2) 세 점 $(a,0)$, $(b,f(b))$, $(c,0)$은 이차함수 $y=q_2(x)$의 그래프 위의 점일 때

$$q_2(x)=\frac{f(b)(x-c)(x-a)}{(a+\boxed{④}b)(\boxed{⑤}b+\boxed{⑥}c)}$$

이다. ④, ⑤, ⑥에 알맞은 값을 각각 구하시오. (15점)

【3-2】 함수 $h(x)$가 $h(a)=h(b)=h(c)$을 만족시킬 때,

$$h''(d)=0$$

인 실수 d가 열린 구간 (a,c)에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. (40점)

【3-3】 등식

$$\frac{\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\frac{f''(d)}{2}$$

를 만족시키는 실수 d가 열린 구간 (a,c)에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. (50점)

2020학년도 논술(AAT) 모의고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅱ)

자연계열 Ⅱ 1번 예시 답안

【1-1】 (20점)

○ **모범답안:**

함수 $f(x)$의 주기가 1이므로,

$$f(x+k)=|\pi\sin(\pi(x+k))|=|\pi\sin(\pi x+\pi k))|=|\pi\sin(\pi x+\pi(k-1))|=\cdots$$
$$=|\pi\sin(\pi x+\pi))|=|\pi\sin(\pi x))|=f(x)\text{이다.}$$

[별해]

(1) 함수 $f(x+k)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동 시켜서 얻어진다. 이때, 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로 두 함수의 그래프가 같음을 알 수 있다. 따라서 $f(x+k)=f(x)$이다.

(2)

$$f(x+k)=|\pi\sin(\pi(x+k))|=|\pi\sin(\pi x)\cos(\pi k)+\pi\cos(\pi x)\sin(\pi k)|$$
$$=\left|(-1)^k\pi\sin(\pi x)\right|=|\pi\sin(\pi x))|=f(x)$$

【1-2】 (30점)

○ **모범답안:** $g(k)=\displaystyle\int_0^{2k+1}2xf(x)dx$라 하자. 이때, $t=(2k+1)-x$라고 두면 치환적분에 의해서 $g(k)$는 다음과 같다.

$$g(k)=-\int_{2k+1}^{0}2(2k+1-t)f(2k+1-t)dt$$

한편, 문제 (1-1)에 의하여 위의 식에서 $f(2k+1-t)=f(t)$이다. 이를 이용하여 $g(k)$를 정리하면 다음과 같다.

$$g(k)=\int_0^{2k+1}2(2k+1)f(t)dt-\int_0^{2k+1}2tf(t)dt=\int_0^{2k+1}2(2k+1)f(t)dt-g(k)$$

위의 식을 $g(k)$로 정리하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$g(k)=\int_0^{2k+1}(2k+1)f(t)dt$$

한편, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=2$이고 함수 $f(x)$의 주기가 1이므로 $\displaystyle\int_0^{2k+1}f(t)dt=4k+2$이고 $g(k)=2(2k+1)^2$ 이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}g(k)=2660$ 이다.

[별해]

정적분의 구간을 나누어 부분적분법을 이용하여 계산이 가능하나 이 경우 계산이 매우 복잡해진다.

【1-3】 (30점)

○ **모범답안:** 정적분 $\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$에서 $s = x - k^2$이라 하자. 그러면 치환적분에 의해서 그 정적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{2k+1} 2(s+k^2)f(s+k^2)ds$$

한편, 문제 (1-1)에 의하여 위의 식에서 $f(s+k^2) = f(s)$ ($\because$ k^2은 정수) 이다. 이를 이용하여 위의 정적분을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_0^{2k+1} 2sf(s)ds + \int_0^{2k+1} 2k^2 f(s)ds$$

한편, $\int_0^1 f(x)dx = 2$ 이고 $f(x)$는 주기가 1이므로, $\int_0^{2k+1} f(s)ds = 4k+2$임을 알 수 있고, 또한 문제 (1-2)에서 얻은 결과를 이용하면 $\int_0^{2k+1} 2sf(s)ds = 2(2k+1)^2$ 임을 알 수 있다.

구하고자 하는 정적분의 값은 $2(2k+1)^2 + 2k^2(4k+2) = 2 + 8k + 12k^2 + 8k^3$ 이다. 따라서 $a = 2,\ b = 8,\ c = 12,\ d = 8$ 이다.

【1-4】 (40점)

○ **모범답안:** 정적분의 성질에 의해 $\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$가 됨을 알 수 있다.

한편, 문제 (1-3)에서 얻은 결과를 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} (8k^3 + 12k^2 + 8k + 2)$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} (8k^3 + 12k^2 + 8k + 2)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k^3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 12k^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 8k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} 2$

(수렴하는 수열의 성질을 이용)

$= \int_0^1 8x^3 dx + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)n(2n-1)}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{4(n-1)n}{n^4} + \lim_{n\to\infty} \frac{2(n-1)}{n^4}$

(정적분의 정의를 이용)

$= 2$ 이다.

자연계열 Ⅱ 1번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	함수 $f(x)$의 주기가 1임을 구한다.	10
	$f(x+k)=f(x)$임을 증명한다.	10
1-2	$\int_0^{2k+1} 2xf(x)dx = \int_0^{2k+1}(2k+1)f(t)dt$를 구한다.	10
	$\int_0^{2k+1} 2xf(x)dx = \int_0^{2k+1}(2k+1)f(t)dt = 2(2k+1)^2$을 구한다.	10
	$\sum_{k=0}^{9} g(k) = 2660$을 구한다.	10
1-3	$\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx = \int_0^{2k+1} 2(s+k^2)f(s+k^2)ds$를 구한다.	10
	$\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx = 2(2k+1)^2 + 2k^2(4k+2) = 2+8k+12k^2+8k^3$을 구한다.	10
	$a=2,\ b=8,\ c=12,\ d=8$을 구한다.	10
1-4	$\int_0^{n^2} 2xf(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k^2}^{(k+1)^2} 2xf(x)dx$임을 유도한다.	10
	$a_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1}(8k^3+12k^2+8k+2)$를 구한다.	10
	$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$임을 구한다.	20

자연계열 Ⅱ 2번 예시 답안

【2-1】 (50점)

○ **모범답안:**

중심의 좌표가 (a,b)이고 반지름이 r인 원 $C_1=\{(x,y)|(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$이 원 C의 내부에 있을 조건은

$$(*) \qquad \sqrt{a^2+b^2}+r<4$$

이고 점 $(2,0)$이 C_1 내부에 있을 조건은

$$(**) \qquad \sqrt{(2-a)^2+b^2}<r$$

이다. (*)와 (**)에 의해서

$$\sqrt{(2-a)^2+b^2}<r<4-\sqrt{a^2+b^2}$$

을 얻을 수 있다. 즉 중심의 영역은 $\sqrt{(a-2)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}<4$인 타원의 내부이다. 타원의 방정식 $\sqrt{(a-2)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}=4$를 간단히 하면 $3(a-1)^2+4b^2=12$가 된다. 이때 $12-4b^2\geq 0$이므로 $-\sqrt{3}\leq b\leq\sqrt{3}$이다. 따라서 정수인 b는 -1, 0 또는 1이 될 수 있고 이 중 a가 정수값을 가질 수 있는 b는 0이다. 따라서 영역 F_1의 경계선 위에 있는 점의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은$(3,0)$와 $(-1,0)$이다.

【2-2】 (60점)

○ **모범답안:** 중심이 (a,b)이고 반지름이 r인 원 $C_2=\{(x,y)|(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$이 원 C의 외부에 있을 조건은

$$(*) \ \sqrt{a^2+b^2}-r>4$$

이고 점 $(8,0)$이 C_2 내부에 있을 조건은

$$(**) \ \sqrt{(8-a)^2+b^2}<r\text{이다.}$$

(*)과 (**)에 의해서

$$\sqrt{(8-a)^2+b^2}<r<\sqrt{a^2+b^2}-4$$

를 얻을 수 있다. 즉, 중심의 영역은 $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(8-a)^2+b^2}>4$인 한쪽 쌍곡선의 내부이고 F_2의 경계는 $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(8-a)^2+b^2}=4$인 곡선이다. 등식을 간단히 하면 $3(a-4)^2-b^2=12$ $(a>4)$이다.

쌍곡선의 정의를 이용하면 $\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}-\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2}=4$이고 타원의 정의를 이용하면 $\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=4$이다. 두 식을 빼면 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}-\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2}-\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=0$을 구할 수 있다. 이에 따라 $\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}:\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2}=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}}:\overline{\mathrm{PP}_2}$를 만족시키는 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=4$가 된다. 즉, 점 P의 자취는 반지름이 4이고 각도가 30°인 호가 되며 이 길이는 $\dfrac{2\pi}{3}$이다.

자연계열 Ⅱ 2번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	중심의 좌표가 (a,b)이고 반지름이 r인 원 $C_1=\{(x,y)\|(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$이 원 C의 내부에 있을 조건이 $\sqrt{a^2+b^2}+r<4$라는 것을 구한다.	10
	점 $(2,0)$이 C_1 내부에 있을 조건이 $\sqrt{(2-a)^2+b^2}<r$라는 것을 구한다.	10
	중심의 영역은 타원의 내부라는 것을 안다.	10
	중심의 영역은 $\sqrt{(a-2)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}<4$인 타원의 내부라는 것을 안다.	10
	영역 F_1의 경계선 위에 있는 점의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 $(3,0)$와 $(-1,0)$이라는 것을 구한다.	10
2-2	중심이 (a,b)이고 반지름이 r인 원 $C_2=\{(x,y)\|(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\}$이 원 C의 외부에 있을 조건은 $\sqrt{a^2+b^2}-r>4$이라는 것을 안다.	10
	점 $(8,0)$이 C_2 내부에 있을 조건은 $\sqrt{(8-a)^2+b^2}<r$이라는 것을 구한다.	10
	중심의 영역이 쌍곡선의 한쪽 내부라는 것을 안다.	5
	중심의 영역은 $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{(8-a)^2+b^2}>4$인 한쪽 쌍곡선의 내부라는 것을 구한다.	5
	쌍곡선의 정의를 이용하면 $\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}-\overline{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2}=4$이고 타원의 정의를 이용하면 $\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=4$이라는 것을 안다.	10
	점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{OP}_1}+\overline{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1}=4$이라는 것을 구한다.	10
	점 P가 그리는 곡선의 길이가 $\frac{2\pi}{3}$이라는 것을 구한다.	10

자연계열 Ⅱ 3번 예시 답안

【3-1】 (30점)
○ 모범답안:
(1) 이차식 $q_1(x)$에 대하여, 등식 $q_1(x)=0$은 두 개의 서로 다른 근 b와 c를 가지므로, $q_1(x)=C(x-b)(x-c)$임을 알 수 있다. 또한 $q_1(a)=f(a)$임을 이용하면, $C=\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}$임을 알 수 있다. 따라서 ①= -1, ②=1, ③= -1이다. (각 5점씩 15점)
(2) 이차식 $q_2(x)$에 대하여, 등식 $q_2(x)=0$은 두 개의 서로 다른 근 a와 c를 가지므로, $q_2(x)=C'(x-c)(x-a)$임을 알 수 있다. 또한 $q_2(b)=f(b)$임을 이용하면, $C'=\dfrac{f(b)}{(b-c)(b-a)}=\dfrac{f(b)}{(a-b)(-b+c)}$임을 알 수 있다. 따라서 ④= -1, ⑤= -1, ⑥=1이다. (각 5점씩 15점)

【3-1】 (40점)
○ 모범답안:
롤의 정리에 의하여, $h'(c_1)=0$인 c_1이 열린 구간 (a,b)사이에 적어도 하나 존재하고, 역시 롤의 정리에 의하여 $h'(c_2)=0$인 c_2가 열린구간 (b,c)사이에 적어도 하나 존재한다. (20점)
이 때, $a<c_1<b<c_2<c$임을 알 수 있다. (10점)
다시 롤의 정리에 의하여 $h''(d)=0$인 d가 열린 구간 $(c_1,c_2)\subset(a,c)$사이에 적어도 하나 존재한다. (10점)

【3-1】 (50점)
○ 모범답안:
문제 **【3-1】** (1),(2)의 답에서와 마찬가지 방법을 통하여, 이차이하 다항함수 $y=q_3(x)$의 그래프가 세 점 $(a,0)$, $(b,0)$, $(c,f(c))$을 지난다고 하면,
$q_3(x)=\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$이다.
$p(x)=q_1(x)+q_2(x)+q_3(x)$로 두면, $p(x)$는 이차 이하의 다항식이고, 함수 $y=p(x)$의 그래프는 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(c,f(c))$를 지난다.
$h(x)=f(x)-p(x)$로 두면, $h(a)=h(b)=h(c)=0$임을 알 수 있다. **【3-2】**의 결과로 부터, $h''(d)=0$인 d가 열린 구간 (a,c)적어도 하나 존재함을 알 수 있다. (20점)
이때, $p(x)$의 이차항의 계수 $A=\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}$이다. (15점)
한편, $h''(x)=f''(x)-p''(x)=f''(x)-2A$인데, $h''(d)=0$으로부터,
$\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\dfrac{f''(d)}{2}$이다. (15점)

자연계열 Ⅱ 3번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	①= -1, ②=1, ③= -1을 구한다.	15
	④= -1, ⑤= -1, ⑥=1을 구한다.	15
3-2	롤의 정리에 의하여, $h'(c_1)=0$인 c_1이 열린 구간 (a,b)사이에 적어도 하나 존재한다는 것을 보인다.	10
	롤의 정리에 의하여 $h'(c_2)=0$인 c_2가 열린구간 (b,c)사이에 적어도 하나 존재한다는 것을 보인다.	10
	이 때, $a<c_1<b<c_2<c$이고 따라서 $c_1<c_2$임을 보인다.	10
	다시 롤의 정리에 의하여 $h''(d)=0$인 d가 열린 구간 $(c_1,c_2)\subset(a,c)$사이에 적어도 하나 존재한다는 것을 보인다.	10
3-3	함수 $y=p(x)$의 그래프가 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(c,f(c))$를 지나도록 $p(x)$를 구하고, $h(x)=f(x)-p(x)$로 두어서 $h''(d)=0$인 d가 열린 구간 (a,c)적어도 하나 존재함을 보인다.	20
	$p(x)$의 이차항의 계수 $A=\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}$를 구한다.	15
	$h''(d)=0$으로부터, $\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\dfrac{f''(d)}{2}$임을 보인다.	15