2020학년도 경북대학교 논술(AAT) 모의고사

자연계열 I 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

시 험 시 간	100분	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		印
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열I 문제지와 자연계열I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 포함하여 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 3쪽으로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (1) 서로 다른 n개에서 $r\,(0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$$_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n개에서 $r\,(0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다. (단, $_n\mathrm{C}_0 = 1$이다.)

(나) 연속확률변수 X가 $a\le X\le b$에 속하는 모든 실수의 값을 가질 때, 함수 $f(x)$가 다음의 조건을 만족하면 $f(x)$를 X의 확률밀도함수라고 한다.

(1) $f(x)\ge 0$ (단, $a\le x\le b$)

(2) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.

(3) $\mathrm{P}(\alpha\le X\le\beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha$, $x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

(다) 확률이 0이 아닌 사건 A에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호 $\mathrm{P}(B|A)$로 나타내며 다음이 성립한다.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\mathrm{P}(A)\ne 0)$$

(라) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, 확률변수 X의 기댓값과 분산은 각각 np, $np(1-p)$이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】 A, B, C, D, E, F, F, O, O, O의 문자가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 문자 O가 적힌 어떤 카드도 서로 이웃하지 않을 확률을 구하시오. (30점)

【1-2】 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $-2\le X\le 1$이고 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = 3a\left(1-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}|x|\right) \quad (-2\le x\le 1)$$

이다. 다음 물음에 답하시오. (단, a는 상수이다)

(1) 상수 a와 $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$의 값을 각각 구하시오. (30점)

(2) $\mathrm{P}(c\le X\le c+1)$은 $c=\alpha$일 때, 최댓값 β를 갖는다. α와 β의 값을 각각 구하시오. (단, $-1\le c\le 0$) (30점)

【1-3】 스마트폰을 생산하는 한 기업이 2개의 생산 공장 A, B를 가지고 있다. 이 기업이 만드는 스마트폰 중 60%는 공장 A에서 만들어지고 나머지는 공장 B에서 만들어진다. 이 기업에서 생산한 스마트폰이 공장 A에서 만들어 졌다고 할 때, 그 제품이 불량품일 확률은 5%이고, 공장 B에서 만들어 졌다고 할 때, 그 제품이 불량품일 확률은 10%이다. 이 기업에서 생산한 200개의 스마트폰 중에서 불량품의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값을 구하시오. (30점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $g(x)$가 구간 I에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \text{일 때 } g(x_1) < g(x_2)$$

이면, 함수 $g(x)$는 구간 I에서 증가한다고 한다. 또

$$x_1 < x_2 \text{일 때 } g(x_1) > g(x_2)$$

이면, 함수 $g(x)$는 구간 I에서 감소한다고 한다.

(나) 함수 $g(x)$가 구간 I에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $g'(x) > 0$이면 $g(x)$는 구간 I에서 증가한다.

(2) $g'(x) < 0$이면 $g(x)$는 구간 I에서 감소한다.

단, 역은 성립하지 않는다.

(다) 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $g(a) \neq g(b)$이면, $g(a)$와 $g(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여

$$g(c) = k$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

0이 아닌 실수 a에 대하여

$$f(x) = \frac{1}{2a}x^2 + (a-1)x + a - 1$$

의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 함수 $f(x)$의 최댓값이 0일 때, a의 값을 구하시오. (20점)

【2-2】 함수 $F(x)$가 실수 전체에서 증가하도록 하는 a의 값의 범위는 $\alpha \le a \le \beta$이다. $\beta - \alpha$의 최댓값을 구하시오. (40점)

【2-3】 다음 조건을 만족시키는 실수 a가 열린 구간 $(2, 3)$에 적어도 하나 존재함을 증명하시오. (50점)

<조건>

(1) 함수 $F(x)$는 어떤 구간 (b, c)에서 감소하고 구간 $(-\infty, b)$와 (c, ∞)에서 증가한다.

(2) $c - b = 9.7$

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(나) (1) 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$ $(c>a>0)$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b^2=c^2-a^2)$$

이다. 이때, 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a$이다.

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,c)$, $\mathrm{F}'(0,-c)$로부터의 거리의 차가 $2b$ $(c>b>0)$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ (단, } a^2=c^2-b^2)$$

이다. 이때, 쌍곡선의 주축의 길이는 $2b$이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

실수 a, b, c $(a\neq 0)$에 대하여 $f(x)=ax^2+bx+c$이고 $H: y^2=e^{-f(x)}\dfrac{d^2}{dx^2}e^{f(x)}$은 쌍곡선이다. 다음 물음에 답하시오.

【3-1】 쌍곡선 H를 $Ax^2+By^2+Cx+D=0$으로 표현할 때, $\dfrac{A}{B}=-4a^2$임을 증명하시오. (20점)

【3-2】 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a,b)가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. (30점)

<조건>

(1) 쌍곡선 H는 직선 $x=1$과 많아야 한 점에서 만난다.

(2) 쌍곡선 H는 직선 $y=x+\dfrac{b}{2a}$와 만나지 않는다.

(3) 쌍곡선 H의 주축의 길이는 4이하이다.

【3-3】 쌍곡선 H의 두 초점이 x축 위에 있을 때, 두 초점을 각각 $\mathrm{F}(\alpha,0)$, $\mathrm{F}'(\beta,0)$ $(\alpha>\beta)$라 하자.

(1) 쌍곡선 H 위의 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 점 Q의 x좌표가 α보다 클 때

$$\overline{\mathrm{FQ}}-\overline{\mathrm{FS}}\sqrt{1+4a^2}=|2a|^p$$

이다. p의 값을 구하시오. (40점)

(2) $(\alpha-\beta)^2$의 값이 최소가 될 때, a의 값을 구하시오. (30점)

2020학년도 논술(AAT) 모의고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅰ)

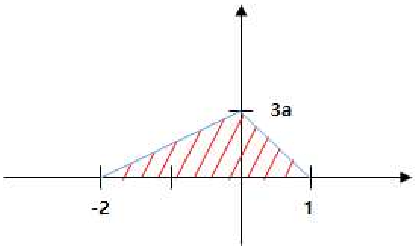
자연계열 Ⅰ 1번 예시 답안

[1-1] (30점)
❍ 모범답안:

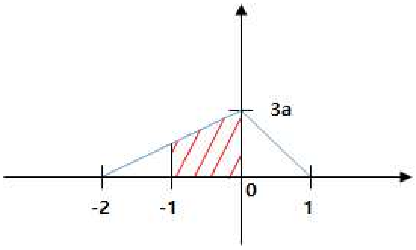
전체 경우의 수는 $\frac{10!}{3!2!}$이고 O가 서로 이웃하지 않는 경우는 $\frac{7!}{2!}\times {}_8\mathrm{C}_3$이다. 따라서 그 확률은 $\dfrac{\frac{7!}{2!}\times {}_8\mathrm{C}_3}{\frac{10!}{3!2!}}=\frac{7}{15}$이다. 또는 전체 경우의 수는 10!이고 O가 서로 이웃하지 않는 경우는 A, B, C, D, E, F, F 7개의 문자를 나열하고 그 사이 또는 양 끝인 8곳 중에서 3개를 선택하여 O를 넣으면 된다. 그러므로 그 경우의 수는 $7!\times {}_8\mathrm{P}_3$이다. 따라서 어떤 O도 서로 이웃하지 않을 확률은 $\frac{7!\times {}_8\mathrm{P}_3}{10!}=\frac{7}{15}$이다.
이다.

[1-2] (60점)
❍ 모범답안:

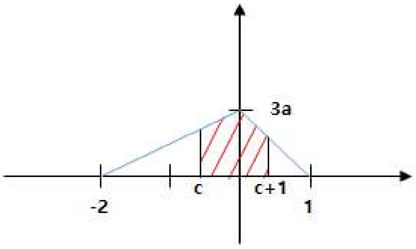
(1) 함수 $f(x)$가 연속확률변수 X의 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 직선 $x=-2$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다. 즉 이 부분은 아래 그림과 같이 높이가 $3a$이고 밑변의 길이가 3인 삼각형이다. 따라서 $3a\times 3\times\frac{1}{2}=1$을 만족하므로 $a=\frac{2}{9}$이다.



$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$의 값은 아래의 표시된 부분의 넓이와 같으므로 이 넓이는 전체넓이 1에서 양쪽의 삼각형 넓이를 빼면 된다. 양쪽 삼각형 넓이 중 왼쪽 삼각형의 넓이는 $1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$이고 오른쪽 삼각형의 넓이는 $1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$는 $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$이다.



(2) $\mathrm{P}(c\le X\le c+1)$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, 직선 $x=c$, 직선 $x=c+1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 아래의 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 된다. 단, $-1\le c\le 0$이다. 그리고 빗금 친 부분의 넓이는 전체 넓이 1에서 양쪽의 삼각형 넓이를 빼면 된다.



양쪽 삼각형 넓이 중 왼쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(c+2)\times\left(\frac{1}{3}c+\frac{2}{3}\right)=\frac{(c+2)^2}{6}$이고, 오른쪽 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(-c)\times\left(-\frac{2}{3}(c+1)+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}c^2$이므로

$\mathrm{P}(c\le X\le 1+c)=1-\frac{(c+2)^2}{6}-\frac{c^2}{3}=-\frac{1}{2}\left(c+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}$이다. $\underline{c=-\frac{2}{3}}$일 때 $\mathrm{P}(c\le X\le 1+c)$의 최댓값은 $\underline{\frac{5}{9}}$이다. 따라서 $\underline{\alpha=-\frac{2}{3}}$이고 $\underline{\beta=\frac{5}{9}}$이다.

[1-3] (30점)

○ 모범답안:

불량품이 뽑히는 사건을 E, 생산된 스마트폰이 A 공장일 사건을 A, 생산된 스마트폰이 B공장일 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)\cup\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(E|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(E|B)\mathrm{P}(B)$이므로 이 기업에서 생산된 스마트폰 중 임의로 추출한 제품이 불량품일 확률 p는 $\underline{p=0.6\times0.05+0.4\times0.1=0.07}$이다. 그리고 이 기업에서 생산된 제품 중에서 임의로 200개를 추출하였을 때, 이 제품 중 불량품의 개수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(200, 0.07)$을 따른다. 따라서 불량품의 개수의 기댓값은 $\underline{np=200\times0.07=14}$이다.

자연계열 Ⅰ 1번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	1. 주어진 조건에 의해 O가 서로 이웃하지 않는 경우의 수를 구하면 10점 2. 어떤 O도 서로 이웃하지 않을 확률을 구하면 20점	30
1-2 (1)	1. a의 값을 구하면 10점 2. $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)$를 구하면 20점	30
1-2 (2)	1. α의 값을 구하면 15점 2. β의 값을 구하면 15점	30
1-3	1. 주어진 조건에 의해 제품이 불량품일 확률 p를 구하면 20점 2. 불량품의 개수의 기댓값을 구하면 10점	30

자연계열 Ⅰ 2번 예시 답안

【2-1】(20점)

○ **모범답안:** 이차함수 $f(x)$가 최댓값 0을 가지므로 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2a}$은 음수이고 (5점) $f(x)$의 판별식은 0이다. (5점) 즉,

$$a<0,\ D=(a-1)^2-\frac{4}{2a}(a-1)=\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}=0 \ (5점)$$

이다. 따라서 $a=-1$이다. (5점)

【2-2】(40점)

○ **모범답안:** $a<0$인 경우, 이차함수 $f(x)$는 반드시 어떤 구간에서 음수 값을 갖는다. 따라서 제시문 (나)에 의해 $F(x)$는 이 구간에서 감소함을 알 수 있다. (5점)

$a>0$이므로 삼차함수 $F(x)$가 실수 전체에서 증가하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\text{모든 } x\text{에 대하여 } f(x)\geq 0$$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 위 조건을 만족시키기 위한 필요충분조건은

$$D=\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}\leq 0 \ (10점)$$

이다. 부등식 $a>0$을 동시에 만족시키는 최대 범위는 $1\leq a\leq 2$이다. (20점) 따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은 1이다. (5점)

【2-3】(50점)

○ **모범답안:** $a\in(2,3)$인 경우, $f(x)$의 판별식 D는 양수이므로 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근

$$x_1=\frac{-(a-1)-\sqrt{\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}}}{\frac{1}{a}},\ x_2=\frac{-(a-1)+\sqrt{\frac{(a+1)(a-1)(a-2)}{a}}}{\frac{1}{a}}$$

를 갖는다. (10점) 또한 $x_1=b,\ x_2=c$라 하면 함수 $F(x)$는 구간 (b,c)에서 감소하고 구간 $(-\infty,b)$와 (c,∞)에서 증가하므로 조건 (i)를 만족한다. (10점) 조건 (ii)는 다음과 같다.

$$2\sqrt{(a+1)a(a-1)(a-2)}=c-b=\frac{97}{10},\ 즉\ (a+1)a(a-1)(a-2)=\left(\frac{97}{20}\right)^2=\frac{9409}{400} \ (15점)$$

이제 $g(a)=(a+1)a(a-1)(a-2)$라 하자. 그러면 함수 $g(a)$는 실수 전체에서 연속이고 $g(2)=0<\frac{9409}{400}<\frac{9600}{400}=24=g(3)$이므로 제시문 (다)에 의해 등식 $g(a)=\frac{9409}{400}$를 만족시키는 실수 a가 구간 $(2,3)$에 적어도 하나 존재한다. (15점) 따라서 주어진 조건을 만족하는 실수 a가 구간 $(2,3)$에 적어도 하나 존재한다.

자연계열 Ⅰ 2번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	a의 부호를 판별한다.	5
	판별식이 0임을 안다.	5
	판별식에 대한 식을 세운다.	5
	a의 값을 구한다.	5
2-2	$a<0$을 제외시킨다.	5
	D가 만족시켜야할 부등식을 표현한다.	10
	a의 범위를 구한다.	20
	$\beta-\alpha$의 최댓값을 구한다.	5
2-3	서로 다른 두 근을 구한다.	10
	조건 (i)이 만족함을 보인다.	10
	조건 (ii)를 위한 a의 식을 쓴다.	15
	사잇값 정리 조건을 체크하고 결론을 도출한다.	15

자연계열 Ⅰ 3번 예시 답안

【3-1】(20점)

○ 모범답안:

$e^{-f(x)}\dfrac{d^2}{dx^2}e^{f(x)}=(2ax+b)^2+2a$이므로 $y^2=(2ax+b)^2+2a$이다.

그래서 $y^2=(2ax+b)^2+2a$를 $Ax^2+By^2+Cx+D=0$로 표현하면

$4a^2x^2-y^2+4abx+b^2+2a=0$이다.

$A=4a^2, B=-1$이므로 $\dfrac{A}{B}=-4a^2$이다

【3-2】(30점)

○ 모범답안:

우선 쌍곡선 H의 방정식은 $\dfrac{(x+\frac{b}{2a})^2}{-\frac{1}{2a}}-\dfrac{y^2}{-2a}=1$이고 직선 $x=1$과 만나지 않기 위해 $a<0$이다.

쌍곡선 H의 두 꼭짓점의 x 좌표가 $-\dfrac{b}{2a}\pm\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$이므로 직선 $x=1$과 $\dfrac{(x+\frac{b}{2a})^2}{-\frac{1}{2a}}-\dfrac{y^2}{-2a}=1$이 만나지 않기 위해서 $-\dfrac{b}{2a}-\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}<1<-\dfrac{b}{2a}+\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$이고

이를 정리하면 $-2a-\sqrt{-2a}<b<-2a+\sqrt{-2a}$이다.

점근선이 $y=\pm 2a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$이므로 직선 $y=x+\dfrac{b}{2a}$와 쌍곡선이 만나기 않기 위해 $-1/2\le a<0$이어야 한다.

주축의 길이는 $2\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$이므로 4이하이기 위해서는 $a\le -1/8$이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{8}}(\sqrt{-2a}-2a)da-\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{8}}(-\sqrt{-2a}-2a)da=\frac{7}{12}$$이다.

【3-3】(40점)

○ 모범답안:

(1) 두 삼각형 $\triangle \mathrm{F'SQ}$와 $\triangle \mathrm{FSQ}$에서 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{F'Q}}^2-\overline{\mathrm{F'S}}^2=\overline{\mathrm{FQ}}^2-\overline{\mathrm{FS}}^2 ---(*)$이다. (10점)

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{FQ}}+2\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$이고 (10점)

쌍곡선의 초점의 성질로부터 $\overline{\mathrm{F'S}}-\overline{\mathrm{FS}}=2\sqrt{\dfrac{-1-4a^2}{2a}}\Leftrightarrow\overline{\mathrm{F'S}}=\overline{\mathrm{FS}}+2\sqrt{\dfrac{-1-4a^2}{2a}}$을 (*)식에 대입하면 (10점)

$-\sqrt{\dfrac{-1-4a^2}{2a}}\,\overline{\mathrm{FS}}+\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}\,\overline{\mathrm{FQ}}=-2a$이므로 $-\sqrt{1+4a^2}\,\overline{\mathrm{FS}}+\overline{\mathrm{FQ}}=(-2a)^{\frac{3}{2}}$이다. 따라서 $p=\dfrac{3}{2}$이다. (10점)

(2) $\alpha = -\dfrac{b}{2a} + \sqrt{\dfrac{-1-4a^2}{2a}}$, $\beta = -\dfrac{b}{2a} - \sqrt{\dfrac{-1-4a^2}{2a}}$ 이므로 (5점)

$(\alpha - \beta)^2 = -8a - \dfrac{2}{a}$ 이고 (5점)

산술기하평균에 의해 $(\alpha-\beta)^2 \geq 2\sqrt{(-8a)(-\dfrac{2}{a})} = 2\sqrt{16} = 8$이 된다. (10점)

따라서 $a = -\dfrac{1}{2}$일 때 $(\alpha-\beta)^2$가 최솟값을 갖는다. (10점)

자연계열 I 3번 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	$e^{-f(x)}\dfrac{d^2}{dx^2}e^{f(x)} = (2ax+b)^2 + 2a$를 구한다.	15
	$4a^2x^2 - y^2 + 4abx + b^2 + 2a = 0$으로부터 $A = 4a^2, B = -1$임을 안다.	5
3-2	쌍곡선 H의 직선 $x=1$과 만나지 않기 위해 $a<0$임을 안다.	5
	쌍곡선 H가 직선 $x=1$과 만나지 않기 위해 $-2a-\sqrt{-2a} < b < -2a+\sqrt{-2a}$ 임을 안다.	10
	직선 $y = x + \dfrac{b}{2a}$ 와 쌍곡선H가 만나기 않기 위해 $-1/2 \leq a < 0$임을 안다.	5
	조건 (3)으로부터 $a \leq -1/8$임을 안다.	5
	영역의 넓이 7/12를 구한다.	5
3-3	(1) $\overline{\mathrm{F'Q}}^2 - \overline{\mathrm{F'S}}^2 = \overline{\mathrm{FQ}}^2 - \overline{\mathrm{FS}}^2$를 구한다.	10
	(1)쌍곡선의 정의 $\overline{\mathrm{F'Q}} = \overline{\mathrm{FQ}} + 2\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$ 이용한다.	10
	(1) 쌍곡선의 초점의 성질$\overline{\mathrm{F'S}} = \overline{\mathrm{FS}} + 2\sqrt{\dfrac{-1-4a^2}{2a}}$ 을 이용한다.	10
	(1)$p = \dfrac{3}{2}$ 를 구한다.	10
	(2) 두 초점 좌표를 구한다.	5
	(2) $(\alpha-\beta)^2 = -8a - \dfrac{2}{a}$ 를 구한다.	5
	(2) 산술기하평균을 쓴다.	10
	(2) $a = -\dfrac{1}{2}$ 을 구한다.	10

2019학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열 I 문제지

시 험 시 간	15:30 ~ 17:10 (100분)	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열 I 문제지와 자연계열 I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 4쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(4쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) (1) 서로 다른 n개에서 $r\ (0<r\le n)$개를 택하는 순열의 수는

$$_{n}\mathrm{P}_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

이다.

(2) 서로 다른 n개에서 $r\ (0\le r\le n)$개를 택하는 조합의 수는

$$_{n}\mathrm{C}_{r}=\frac{_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

이다. (단, $_{n}\mathrm{C}_{0}=1$이다.)

(3) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$$_{n}\mathrm{H}_{r}={}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$$

이다.

(나) 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p로 일정할 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하자.

(1) 확률변수 X가 갖는 값은 $0, 1, 2, \cdots, n$이고, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{n}\mathrm{C}_{x}\,p^{x}(1-p)^{n-x}\quad(x=0,1,2,\cdots,n)$$

이며, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따른다고 한다.

(2) 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}\quad(\text{단, } q=1-p)$$

이다.

(다) 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다고 할 때, 양수 z에 대하여 확률 $\mathrm{P}(0\le Z\le z)$는 다음과 같은 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【1-1】 학생 A가 수영 강습을 받기 위해, 다음 조건

$$m_2-m_1\ge 3,\ m_3-m_2\ge 3$$

을 만족시키도록 2019년도의 열두 달 중 세 달 m_1월, m_2월, m_3월을 선택할 수 있는 모든 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)의 개수를 구하시오. (30점)

【1-2】 여덟 개의 면 중 k개의 면에는 빨간색이 각각 칠해져 있고, 나머지 면에는 파란색이 각각 칠해져 있는 정팔면체 모양의 물체가 있다. 이 물체를 n번 던져서 지면에 닿은 면이 빨간색이 되는 횟수를 X라 하자. 확률변수 X가 다음의 조건을 만족시킬 때, k와 n의 값을 구하시오. (단, 각각의 면에는 한 가지 색만 칠해져 있다.) (30점)

(a) $\mathrm{E}(X)=4\mathrm{V}(X)$
(b) $\mathrm{P}(X=1)=30\,\mathrm{P}(X=0)$

【1-3】 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{4}{(2m+1)^2}\right)$를 따른다고 한다. $\mathrm{P}(X\le 4)=0.9772$일 때, 양수 m의 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 함수 $h(x)$에 대하여 $t=h(x)$로 놓으면

$$\int g(h(x))h'(x)dx=\int g(t)dt$$

이다.

(나) 함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[-a,a]$에서 연속일 때, 이 구간의 모든 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이면

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx=0$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$가 다음 조건을 만족한다. (단, a, b, c, d는 상수이다.)

모든 실수 x에 대하여 $3f'(x)=(x+3)f''(x)$ 이다.

【2-1】 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. (30점)

【2-2】 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3}=f'(\alpha)$를 만족시키는 실수 α의 값을 구하시오. (20점)

【2-3】 함수 $f(x)$가

$$\int_{-4}^{-2}\left(\sin\left(\frac{x+3}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+3}{2}\right)\right)^2 f(x)\,dx=0$$

을 만족시킬 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

이다.

(나) 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

이다.

(다) 타원

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

위의 점 (x_0, y_0)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$$

이다.

(라) 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

【3-1】 타원

$$\frac{x^2}{4}+y^2-px-qy+1=0$$

이 x축에 접하고 단축의 길이가 6일 때, 두 초점의 좌표를 구하시오. (단, $p\ge 0, q\ge 0$이고 $p^2+\frac{q^2}{4}>1$ 이다.) (30점)

【3-2】 타원

$$\frac{x^2}{4R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$$

과 직선 $l_1 : y=mx$의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하고, 점 P에서 타원에 접하는 직선을 l_2라 하자. (단, $R>0$, $m>0$이다.)

(1) 직선 l_2의 기울기를 $f(m)$이라 할 때, $mf(m)$을 구하시오. (20점)

(2) 직선 l_1과 직선 l_2가 이루는 예각의 크기를 $\theta(m)$이라 할 때, $\theta(m)$이 최소가 되도록 하는 m의 값을 구하시오. (30점)

수학(문제 4)

[4] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$y'=f'(g(x))g'(x)$$

이다.

(나) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 닫힌 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

이다. (단, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이다.)

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

이차함수 $f(x)=4ax^2-8ax$는

$$\int_e^3\frac{2}{f(x)}\,dx=1-\ln(3e-6)$$

을 만족한다. (단, $a>0$이고 e는 자연로그의 밑이다.)

【4-1】 a의 값을 구하시오. (15점)

【4-2】 이차함수 $g(x)=\dfrac{x^2}{4}-x+10$과 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수

$$h(x)=x^5e^{-g(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{g(x)}}{x^4}\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $h(1)$의 값을 구하시오. (15점)

(2) $\displaystyle\int_1^2\left(\frac{d}{dx}e^{f(x)}\right)h(x)\,dx=\frac{p}{e}+q$일 때, $p+2q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) (30점)

【4-3】 음이 아닌 두 실수 c, d에 대하여 구간 $I=\left[\dfrac{19}{10},\infty\right)$에서 정의된 함수 $k(x)$는

$$k(x)=\ln(f(x)+c)+e^{-f(x)}-d$$

이다. 함수 $k(x)$가 다음의 조건을 동시에 만족시킬 때, c와 d의 순서쌍 (c,d)가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. (40점)

(a) 모든 $x\geq 2$에 대하여 $k(x)\geq 0$
(b) 모든 $x_1, x_2\in I$에 대하여 $(x_1-x_2)(k(x_1)-k(x_2))\geq 0$