2020학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

논술(AAT) 자연계열 Ⅱ 문제지

(의예과, 치의예과, 수의예과)

시 험 시 간	15:30 ~ 17:10 (100분)	
지원학과(부)	학과(부, 전공)	감독위원 확인
수 험 번 호		㊞
성 명		

감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열 Ⅱ 문제지와 자연계열 Ⅱ 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 3쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(3쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 "0"점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

(a) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

(b) 함수 $f(x)$가 열린 구간 (α, β)에서 미분가능하고 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속일 때, $f(x)$의 극값과 양 끝점의 함숫값 $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중에서 가장 큰 값이 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이다.

(나) 함수 $f(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라고 하며, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

(다) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(a) $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(b) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

$\frac{1}{2} \le t \le 2$인 실수 t에 대하여, 포물선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(t, 0)$이고 y절편은 $\frac{1}{t}$이다. 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 포물선 $y=f(x)$와 직선 $y=m$이 만나는 두 점 중 x좌표가 작은 점을 $\mathrm{P}(a(t), m)$이라 할 때, $a(t)$를 구하시오.
(단, $0<m<\frac{8}{9}$) (20점)

【1-2】 $0<m<\frac{8}{9}$인 m에 대하여, 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$에서 【1-1】에서 구한 함수 $a(t)$의 최댓값을 $g(m)$이라 하자. 미분계수의 정의를 이용하여 $g(m)$이 $m=\frac{2}{9}$에서 미분가능함을 증명하고, 열린 구간 $\left(0, \frac{8}{9}\right)$에서 도함수 $g'(m)$을 구하시오. (50점)

【1-3】 【1-2】에서 구한 함수 $g(x)$와 도함수 $g'(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right]$에서 방정식 $g(x)+xg'(x)=0$을 만족시키는 x의 최댓값을 β, 최솟값을 α라 할 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오. (10점)

(2) 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(k)$라 하자. 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right]$에서 $S(k)$의 최댓값을 구하시오. (40점)

수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$$_{n}\Pi_{r} = n^{r}$$

이다.

(나) n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p!\times q!\times \cdots \times r!}$$

이다. (단, $p+q+\cdots+r=n$)

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

두 정수 m, n에 대하여 좌표평면 위의 점 (m, n)을 **격자점**이라 하자. 격자점 (m, n)에 **인접**한 격자점은

$$(m, n+1),\ (m, n-1),\ (m+1, n),\ (m-1, n)$$

뿐이고, 각각의 격자점을 순서대로 **위로, 아래로, 오른쪽으로, 왼쪽으로 인접한다**고 하자.

물체 M은 좌표평면 위에서 다음 규칙에 따라 이동한다.

(규칙 a) 시각 $t=0$일 때 물체 M은 격자점 $(0, 0)$에 위치한다. (규칙 b) 시각 $t=i$일 때 물체 M이 한 격자점에 위치하면, 시각 $t=i+1$일 때 물체 M이 그 격자점과 인접한 네 격자점에 위치할 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이다. (단, i는 음이 아닌 정수이다.)

물체 M을 점 M이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

【2-1】 다음은 시각 $t=2N$일 때 물체 M이 격자점 (m, n)에 위치하면, 세 명제

(i) $m+n$은 짝수이다. (ii) $-2N \le m+n \le 2N$ (iii) $-2N \le m-n \le 2N$

이 참임을 증명하는 과정이다. (단, N은 자연수이다.)

시각 $t=2N$에 물체 M이 격자점 (m, n)에 위치할 때, 시각 $t=0$부터 시각 $t=2N$까지 위로, 아래로, 오른쪽으로, 왼쪽으로 인접한 격자점으로 이동한 횟수를 각각 u, d, r, l이라 하자. 이 경우 u, d, r, l은 연립방정식 $u+d+r+l=\boxed{①}\times N$ $u-d=\boxed{②}\times m+\boxed{③}\times n \quad \cdots\cdots\ (*)$ $r-l=\boxed{③}\times m+\boxed{②}\times n$ 을 만족시킨다. $m+n=\boxed{④}\times(N-d-l)$이므로 명제 (i)은 참이다. 또한, 연립방정식 (*)을 이용하면 ⋮ (중략) ⋮ 따라서 명제 (ii)와 (iii)은 참이다.

①, ②, ③, ④에 들어갈 알맞은 값을 각각 구하시오. (20점)

【2-2】 시각 $t=6$일 때 물체 M이 격자점 $(1, 1)$에 위치할 확률은 $\frac{c}{1024}$이다. 자연수 c의 값을 구하시오. (40점)

【2-3】 시각 $t=2N$일 때 물체 M은 【2-1】의 세 명제를 만족시키는 모든 격자점 (m, n)에 위치할 수 있다. 실수 q에 대하여 집합 $\mathrm{R}_q, \mathrm{S}_q$를

$$\mathrm{R}_q = \{(x, y)\ |\ |x|+|y| = 2^q,\ x, y\text{는 실수}\},$$
$$\mathrm{S}_q = \{(x, y)\ |\ \max\{|x|, |y|\} = 2^q,\ x, y\text{는 실수}\}$$

로 정의한다. 자연수 k에 대하여 시각 $t=2^{k+1}$에 물체 M이 위치할 수 있는 모든 격자점들 중에서 집합

$$\mathrm{R}_{k+1} \cup \mathrm{S}_k \cup \mathrm{R}_k \cup \mathrm{S}_{k-1} \cup \cdots \cup \mathrm{R}_1 \cup \mathrm{S}_0$$

에 속하는 점들의 개수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

(단, 실수 a와 b 중 크거나 같은 수를 $\max\{a, b\}$라 하고, N은 자연수이다.) (50점)

수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(나) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(라) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n \quad (\alpha \text{는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이면

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

함수 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + c\sin 2x$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, c는 상수이다.)

【3-1】 $c=0$일 때, 닫힌 구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 함수 $f(x)$는 연속인 역함수 f^{-1}를 갖는다. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 함수

$$g(x) = \int_0^x \left(1 - f^{-1}(s)\right) ds$$

의 최댓값을 M이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) M의 값을 구하시오. (20점)

(2) 자연수 n에 대하여, x에 대한 방정식 $g(x) = \frac{M}{n}$의 근을 d_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n d_n = \frac{bM}{a+\pi}$이다. 자연수 a, b의 값을 각각 구하시오. (30점)

【3-2】 실수 t에 대하여, x에 대한 방정식 $f(x) = t$ $(0 \le x < 2\pi)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, $c > \frac{\sqrt{2}}{2}$)

(1) 구간 $[0, 2\pi)$에서 방정식 $f'(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. (30점)

(2) 함수 $h(t)$가 $t=0$에서 불연속일 때

$$c, \quad h(0), \quad \lim_{t\to 0-} h(t), \quad \lim_{t\to 0+} h(t)$$

의 값을 각각 구하시오. (40점)

2020학년도 논술(AAT) 고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅱ)

자연계열 Ⅱ 1번 예시 답안

【1-1】

$f(x)=\dfrac{1}{t^3}(x-t)^2$이므로 $x=t\pm\sqrt{t^3m}$이다. 따라서 조건으로부터 $a(t)=t-\sqrt{t^3m}$이다.

【1-2】

$a'(t)=1-\dfrac{3}{2}\sqrt{t}\sqrt{m}$이므로 $a'(t)=0$인 t는 $\dfrac{4}{9m}$이다. 만약 $t<\dfrac{4}{9m}$이면 $a'(t)>0$이고 $t>\dfrac{4}{9m}$이면 $a'(t)<0$이다. 즉 $a(t)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$\dfrac{4}{9m}$	$\cdots$
$a'(t)$	$+$	0	$-$
$a(t)$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{27m}$	$\searrow$

$a(t)$의 증감을 이용하면 m이 $\dfrac{4}{9m}<\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값 $g(m)=a\left(\dfrac{1}{2}\right)$이고, $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{4}{9m}<2$ 일 때 최댓값 $g(m)=a\left(\dfrac{4}{9m}\right)$이고, $\dfrac{4}{9m}\le 2$일 때 최댓값 $g(m)=a(2)$이다. 따라서

$$g(m)=\begin{cases}2-\sqrt{8m} & \left(0<m<\dfrac{2}{9}\right)\\[2mm] \dfrac{4}{27m} & \left(\dfrac{2}{9}\le m<\dfrac{8}{9}\right)\end{cases}$$

이다. 구간별로 미분하면

$$g'(m)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} & \left(0<m<\dfrac{2}{9}\right)\\[2mm] -\dfrac{4}{27m^2} & \left(\dfrac{2}{9}<m<\dfrac{8}{9}\right)\end{cases}$$

이다. 따라서 $m=\dfrac{2}{9}$에서 함수 $g(m)$이 미분가능한지 확인하면 된다. $m=\dfrac{2}{9}$에서 $g(m)$의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{h\to0+}\frac{g\left(h+\dfrac{2}{9}\right)-g\left(\dfrac{2}{9}\right)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\left(\frac{4}{27\left(h+\dfrac{2}{9}\right)}-\frac{4}{27\times\dfrac{2}{9}}\right)=-3,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{g\left(h+\dfrac{2}{9}\right)-g\left(\dfrac{2}{9}\right)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{1}{h}\left(\left(2-\sqrt{8\left(\frac{2}{9}+h\right)}\right)-\left(2-\sqrt{8\times\frac{2}{9}}\right)\right)=-3$$

이므로 $m=\dfrac{2}{9}$에서 미분가능하다. 또한 도함수는 $g'(m)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} & \left(0<m<\dfrac{2}{9}\right)\\[2mm] -\dfrac{4}{27m^2} & \left(\dfrac{2}{9}\le m<\dfrac{8}{9}\right)\end{cases}$ 이다.

【1-3】(1)

【1-2】의 풀이로부터 $\dfrac{g(x)}{g'(x)}=\begin{cases}-(2-\sqrt{8x})\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} & \left(0<x<\dfrac{2}{9}\right)\\[2mm] -x & \left(\dfrac{2}{9}\le x<\dfrac{8}{9}\right)\end{cases}$ 이므로 $g(x)+xg'(x)=0$을 만족시키는 x의 범위는 $\dfrac{2}{9}\le x<\dfrac{8}{9}$이다. 따라서 $\beta=\dfrac{7}{9}$이고 $\alpha=\dfrac{2}{9}$이므로 $\beta-\alpha=\dfrac{5}{9}$이다.

(2)

$y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$에서의 접선은 $y=g'(k)(x-k)+g(k)$이고 x절편, y절편은 각각 $\dfrac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)}$, $g(k)-kg'(k)$이다. 따라서 $S(k)=-\dfrac{1}{2g'(k)}\{g(k)-kg'(k)\}^2$이다. 【1-2】의 풀이로부터 $g'(k)=\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} & \left(\dfrac{1}{9}\le k<\dfrac{2}{9}\right) \\ -\dfrac{4}{27k^2} & \left(\dfrac{2}{9}<k\le\dfrac{7}{9}\right) \end{cases}$ 이므로 닫힌 구간 $\left[\dfrac{1}{9}, \dfrac{7}{9}\right]$에서 $S(k)$는 연속이다. 또한, $S(k)$는 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$, $\left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$ 각각에서 미분가능하며

$$S'(k)=\frac{g''(k)}{2g'(k)^2}(g(k)-kg'(k))(g(k)+kg'(k))$$

이다. 또한 위의 각 열린 구간에서 $g(k)-kg'(k)\neq 0$, $g''(k)>0$, $g'(k)\neq 0$이다. 따라서 $S'(k)=0$인 k는 방정식 $g(k)+kg'(k)=0$의 근이다. (1)의 풀이에 의하여 $g(k)+kg'(k)=0$을 만족시키는 모든 k의 집합은 닫힌 구간 $\left[\dfrac{2}{9}, \dfrac{7}{9}\right]$이다. 이때,

$$S(k)=-\frac{1}{2g'(k)}(g(k)-kg'(k))^2=-\frac{2g(k)^2}{g'(k)}=\frac{8}{27}$$

이다. 또한 열린 구간 $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$에서 $S'(k)<0$이므로 $S(k)$의 최댓값은 $\dfrac{8}{27}$이다.

자연계열 Ⅱ 1번 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
[1-1]	$f(x)=\frac{1}{t^3}(x-t)^2$	10
	$a(t)=t-\sqrt{t^3m}$	10
[1-2]	$a'(t)=0$인 t는 $\frac{4}{9m}$	10
	$g(m)=\begin{cases} 2-\sqrt{8m} & \left(0<m<\frac{2}{9}\right) \\ \frac{4}{27m} & \left(\frac{2}{9}\le m<\frac{8}{9}\right)\end{cases}$	15
	$g'(m)=\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}} & \left(0<m<\frac{2}{9}\right) \\ -\frac{4}{27m^2} & \left(\frac{2}{9}<m<\frac{8}{9}\right)\end{cases}$	5
	$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(h+\frac{2}{9}\right)-g\left(\frac{2}{9}\right)}{h}=-3$	10
	$\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(h+\frac{2}{9}\right)-g\left(\frac{2}{9}\right)}{h}=-3$	10
[1-3] (1)	$\beta-\alpha=\frac{5}{9}$	10
[1-3] (2)	$S(k)=-\frac{1}{2g'(k)}(g(k)-kg'(k))^2$ 또는 $S(k)=\begin{cases} \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2}}(2-\sqrt{2k})^2 & \left(0<m<\frac{2}{9}\right) \\ \frac{8}{27} & \left(\frac{2}{9}\le m<\frac{8}{9}\right)\end{cases}$	10
	$S'(k)=\frac{g''(k)}{2g'(k)^2}(g(k)-kg'(k))(g(k)+kg'(k))$	20
	$S(k)$의 최댓값은 $\frac{8}{27}$	10

자연계열 Ⅱ 2번 예시 답안

【2-1】

①$=2$, ②$=0$, ③$=1$, ④$=2$

【2-2】

문제 【2-1】의 증명과정에서 $N=3$, $(m,n)=(1,1)$ 이므로 연립방정식 (*)은

$$\begin{aligned} &u+d+r+l=6 \\ &u-d=1 \\ &r-l=1 \end{aligned}$$

$u=d+1$, $r=l+1$ 이므로 $d+l=2$ 이고

$$\begin{aligned} &l=2-d \\ &u=1+d \\ &r=1+l=3-d \end{aligned}$$

6개 중에서 같은 것이 각각 d개, $2-d$개, $1+d$개, $3-d$개씩 있을 때, 이들을 모두 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수는

$$\frac{6!}{d!\times(2-d)!\times(1+d)!\times(3-d)!}$$

여기서 $d=0,1,2$ 이므로 $t=6$ 일 때 물체 M이 격자점 $(1,1)$ 에 위치하는 총 경로의 수는

$$\frac{6!}{0!\times 2!\times 1!\times 3!}+\frac{6!}{1!\times 1!\times 2!\times 2!}+\frac{6!}{2!\times 0!\times 3!\times 1!}=60+180+60=300$$

물체 M이 $t=6$까지 이동 가능한 총 경로의 수는 4^6 이므로 구하는 확률은

$$\frac{300}{4^6}=\frac{\boxed{75}}{1024}$$

따라서 $c=75$이다.

【2-3】

1) 물체 M이 시각 $t=2^{k+1}$에 위치할 수 있는 격자점은 마름모 R_{k+1} 위나 내부에 있는 격자점 (m,n) 중에서 $m+n$이 짝수인 것이다.

2) 자연수 q에 대하여 마름모 R_q 위의 모든 격자점은 성분의 합이 짝수이고, 그 개수는 4×2^q 이다.

3) 자연수 q에 대하여 정사각형 S_q 위의 격자점 중 1사분면에 위치하고 좌표의 합이 짝수인 격자점은 $(2,2^q),(4,2^q),(6,2^q),\cdots,(2^q,2^q),(2^q,2^q-2),(2^q,2^q-4),(2^q,2^q-6),\cdots,(2^q,2)$ 이고 그 개수는 $2\times 2^{q-1}-1$ 이다. 대칭성에 의하여 제$1,2,3,4$사분면에 위치하고 성분의 합이 짝수인 격자점의 개수는 $4\times 2^q-4$ 이다. 또한 좌표축 위의 네 격자점 $(0,\pm 2^q),(\pm 2^q,0)$ 을 포함시키면, 정사각형 S_q 위의 격자점 중 성분의 합이 짝수인 격자점의 개수는 4×2^q 이다.

4) 물체 M이 시각 $t=2^{k+1}$에 위치 가능한 격자점 중 도형 $\mathrm{R}_{k+1},\mathrm{R}_k,\mathrm{R}_{k-1},\cdots,\mathrm{R}_1$ 위에 놓인 격자점의 개수는 각각 $4\times 2^{k+1},4\times 2^k,4\times 2^{k-1},\cdots,4\times 2^1$ 이고, 도형 $\mathrm{S}_k,\mathrm{S}_{k-1},\mathrm{S}_{k-2},\cdots,\mathrm{S}_0$ 위에 놓인 격자점의 개수는 각각 $4\times 2^k,4\times 2^{k-1},4\times 2^{k-2},\cdots,4\times 2^0$ 이다. 또한 인접한 도형들은 4개의 격자점을 공유하므로 중복된 횟수를 제외하면

$$\begin{aligned} a_k &= 4\times 2^{k+1}+8(2^k+2^{k-1}+\cdots+2^1)+4\times 2^0-4(k+1)-4k \\ &= 4\times 2^{k+1}+8(2^{k+1}-2)-8k=12\times 2^{k+1}-8k-16 \end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(12\times 2^{k+1}-8k-16)=48504$

자연계열 Ⅱ 2번 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	① = 2	5
	② = 0	5
	③ = 1	5
	④ = 2	5
2	u, d, r, l 의 연립방정식을 나타내면	5
	한 변수로 나머지 세 변수를 나타내면	15
	총 경로의 수를 구하면	15
	$c = 75$ 를 구하면	5
3	도형 $\mathrm{R}_{k+1}, \mathrm{R}_k, \mathrm{R}_{k-1}, \cdots, \mathrm{R}_1$ 위의 격자점의 개수를 구하면	15
	도형 $\mathrm{S}_k, \mathrm{S}_{k-1}, \mathrm{S}_{k-2}, \cdots, \mathrm{S}_0$ 위의 격자점의 개수를 구하면	15
	중복된 횟수를 제외하면	15
	$\sum_{k=1}^{10} a_k = 48504$를 구하면	5

자연계열 Ⅱ 3번 예시 답안

【3-1】
(1) (20점)
$f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는 닫힌 구간 $[0,2]$사이에서 $-\frac{\pi}{4}\le f^{-1}(x)\le 0$, $1\le 1-f^{-1}(x)\le 1+\frac{\pi}{4}$이다.
따라서 함수 $g(x)$의 피적분함수는 양수의 값을 가지므로 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0,2]$에서 증가한다. 그러므로 $g(2)=M$이다.
역함수의 성질에 의하여

$$\int_0^2 f^{-1}(s)ds=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(x)dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=2-2\sqrt{2}$$

이다. 따라서

$$M=g(2)=2-\int_0^2 f^{-1}(s)ds=2\sqrt{2}$$

이다.

(2) (30점)
함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0,2]$에서 증가하고, $g(2)=M$이므로 자연수 n에 대하여 방정식 $g(x)=\frac{M}{n}$는 닫힌 구간 $[0,2]$에서 하나의 실근 d_n을 갖는다. $g(0)=0$이고, 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0,2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{M}{n}=g(d_n)=d_n\left(\frac{g(d_n)-g(0)}{d_n}\right)=d_ng'(c_n),\ 0<c_n<d_n\le 2$$

인 c_n이 존재한다. $1\le 1-f^{-1}(c_n)=g'(c_n)$이고 $d_n=\frac{M}{ng'(c_n)}\le\frac{M}{n}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}d_n=0$이다.

$f^{-1}(x)$는 연속이고 $f^{-1}(0)=-\frac{\pi}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}nd_n=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{1-f^{-1}(c_n)}=\frac{M}{1-f^{-1}(0)}=\frac{4M}{4+\pi}$$

따라서 $a=b=4$이다.

【3-2】
(1) (30점)
○ **모범답안:** $f'(x)=2(\cos x-\sin x)(1+c(\cos x+\sin x))$이므로 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$와 방정식 $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{c}$의 근이 방정식 $f'(x)=0$의 모든 근이다. $-\sqrt{2}<-\frac{1}{c}<0$이므로 곡선 $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 와 $y=-\frac{1}{c}$은 구간 $[0,2\pi)$에서 서로 다른 두 점에서 만나고, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$는 방정식 $\cos x+\sin x=-\frac{1}{c}$의 근이 될 수 없다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

(2) (40점)
○ **모범답안:** $f(x)=t$이고 $w=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$이면,
$(\cos x+\sin x)^2=1+2\cos x\sin x$이므로 함수 $F(w)=c\left(w+\frac{1}{c}\right)^2-c-\frac{1}{c}$라 할 때 $F(w)=t$이다. 따라서 방정식 $f(x)=t$의 모든 서로 다른 실근은 $F(w)=c\left(w+\frac{1}{c}\right)^2-c-\frac{1}{c}=t$인 각각의 w에 대하여 (단, $-\sqrt{2}\le w\le\sqrt{2}$) $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=w$인 x를 구함으로써 얻을 수 있다. 또한

$\sqrt{2}\sin\left(x_1+\frac{\pi}{4}\right)=w_1$, $\sqrt{2}\sin\left(x_2+\frac{\pi}{4}\right)=w_2$, $w_1 \neq w_2$이면 $x_1 \neq x_2$이므로 근이 중복되는 경우가 없다. $F\left(-\frac{1}{c}\right)=-c-\frac{1}{c}$, $F(-\sqrt{2})=c-2\sqrt{2}$, $F(\sqrt{2})=c+2\sqrt{2}$이고, c의 조건으로부터 포물선 $y=F(w)$의 꼭짓점의 w좌표 $-\frac{1}{c}\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$이고 대소관계
$-c-\frac{1}{c}<c-2\sqrt{2}<c+2\sqrt{2}$가 성립한다. 따라서 구간 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$에서 방정식 $F(w)=t$의 실근의 개수를 $H(t)$라 하면

$$H(t)=\begin{cases}0 & (\ t<A,\ t>C\ ) \\ 1 & (\ t=A,\ B<t\leq C\ ) \\ 2 & (\ A<t\leq B\ )\end{cases}$$

이다. (단, $A=-c-\frac{1}{c}$, $B=c-2\sqrt{2}$, $C=2+\sqrt{2}$) 삼각함수의 그래프를 이용하면 구간 $[0, 2\pi)$에서 $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=w$인 x의 개수는 $w=\pm\sqrt{2}$일 때 1개, $-\sqrt{2}<w<\sqrt{2}$ 일 때 2개이므로

$$h(t)=\begin{cases}0 & (\ t<A,\ t>C\ ) \\ 1 & (\ t=C\ ) \\ 2 & (\ t=A,\ B<t<C\ ) \\ 3 & (\ t=B\ ) \\ 4 & (\ A<t<B\ )\end{cases}$$

이다. c의 조건으로부터 $h(t)$의 불연속점들 중 $A\neq 0$, $C\neq 0$이므로 $c=2\sqrt{2}$이다. $h(0)=3$, $\lim_{t\to 0-}h(t)=4$, $\lim_{t\to 0+}h(t)=2$이다

자연계열 Ⅱ 3번 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
【3-1】 (1)	$M=2\sqrt{2}$ 일때의 x값 2를 구한다.	10
	$M=2\sqrt{2}$를 구한다.	10
【3-1】 (2)	$a=4$를 구한다.	5
	$b=4$를 구한다.	5
	$\lim_{n\to\infty} nd_n=\frac{M}{g'(0)}$을 이용한다.	20
【3-2】 (1)	실근의 개수 4를 구한다.	20
	$\cos x+\sin x=-\frac{1}{c}$의 근이 $\cos x-\sin x=0$의 근과 중복되지 않음을 체크한다.	10
【3-2】 (2)	$c=2\sqrt{2}$를 구한다.	10
	$h(0)=3$을 구한다.	10
	$\lim_{t\to 0-}h(t)=4$를 구한다.	10
	$\lim_{t\to 0+}h(t)=2$를 구한다.	10