2020학년도 경북대학교 대학입학 수시모집

# 논술(AAT) 자연계열 I 문제지

| | | |
|---|---|---|
| 시 험 시 간 | 15:30 ~ 17:10 (100분) | |
| 지원학과(부) | 학과(부, 전공) | 감독위원 확인 |
| 수 험 번 호 | | 印 |
| 성 명 | | |

**감독관의 지시가 있기 전까지 표지를 넘기지 마시오.**

< 수험생 유의 사항 >

※ 자연계열 I 문제지와 자연계열 I 답안지가 맞는지 반드시 확인(의예과, 치의예과, 수의예과 제외)

1. 문제지 및 답안지에 지원학과(부, 전공), 수험번호, 성명을 정확하게 기입할 것[반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것]
2. 문제지는 표지를 제외하고 3쪽으로 구성되어 있으며, 답안지는 수학 2매(3쪽)로 구성되어 있음
3. 답안지에 주어진 물음 번호에 맞추어 답안을 작성하되, 반드시 주어진 테두리 안에 답안을 작성할 것(테두리를 벗어난 부분은 채점 대상에서 제외함)
4. 답안의 작성은 반드시 검정색 필기구(볼펜, 연필 등) 중 1가지를 계속 사용할 것
5. 답안을 수정할 경우 지우개를 사용하거나 두 줄을 긋고 다시 작성하여야 함
6. 답안지에 자신의 신원을 드러내거나 문제와 관계없는 내용을 기록할 경우에는 “0”점 처리함
7. 연습지가 필요한 경우 문제지의 빈 공간을 사용할 수 있음

# 수학(문제 1)

[1] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

**(가)** 표본공간 $S$의 두 사건 $A, B$에 대하여 사건 $A$가 일어났을 때, 사건 $B$가 일어날 확률을 사건 $A$가 일어났을 때의 사건 $B$의 조건부확률이라고 하며, 이것을 기호로 $\mathrm{P}(B|A)$와 같이 나타낸다. 이때

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(A) \neq 0)$$

이 성립한다.

**(나)** 이산확률변수 $X$가 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$의 값을 가질 확률을 각각 $\mathrm{P}(X = x_i) = p_i$라고 할 때, $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 확률 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 사이의 대응 관계를 이산확률변수 $X$의 확률분포라 한다. 이산확률변수 $X$의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X = x_i) = p_i$는 다음의 성질을 만족시킨다.

$(a)$ $0 \leq p_i \leq 1$

$(b)$ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

이산확률변수 $X$의 기댓값(평균) $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$는

$(c)$ $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$(d)$ $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$

이다.

**(다)** 자연수 $k$에 대하여

$(a)$ $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$

$(b)$ $\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$(c)$ $\sum_{j=1}^{k} j^3 = \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

이다.

**(라)** 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 표준정규분포라고 한다. 확률변수 $Z$가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따를 때, 양수 $z$에 대하여 확률 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$는 다음의 표준정규분포표를 이용하여 구할 수 있다.

| $z$ | $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$ |
|---|---|
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |
| 3.0 | 0.4987 |

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

**【1-1】** 두 사건 $A, B$가

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A^C \cap B) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$$

을 만족시킬 때, $\mathrm{P}(B^C|A^C)$의 값을 구하시오. (단, $A^C$은 $A$의 여사건이다.) (20점)

**【1-2】** 이산확률변수 $X, Y$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 자연수 $k$에 대하여 이산확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $k$ | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_k$ | 1 |

다음 조건을 만족시키는 자연수 $k$와 $\mathrm{P}(X = 1)$의 값을 구하시오. (30점)

$(a)$ $\mathrm{P}(X = j) = j \times \mathrm{P}(X = 1)$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$

$(b)$ $\mathrm{E}(X^2) = \frac{10}{3}\mathrm{E}(X)$

(2) 상수 $a$에 대하여 서로 다른 세 실수 $\alpha, \beta, \gamma$는 방정식 $x^3 - (a+1)x^2 + 2(a-1)x - a + 2 = 0$의 근이다. 이산확률변수 $Y$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $Y$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(Y = y)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

이산확률변수 $Y$의 분산이 $\frac{2}{3}$일 때, 상수 $a$의 값을 구하시오. (30점)

**【1-3】** 평균이 $m$이고 표준편차가 $\sigma$인 정규분포를 따르는 확률변수 $X$가 다음 조건을 만족시킨다.

$(a)$ $\mathrm{P}(X \leq 11) = 0.1587$

$(b)$ $\mathrm{P}(X \geq 6) = 0.9772$

제시문 (라)를 이용하여 $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 21)$의 값을 구하시오. (30점)

# 수학(문제 2)

[2] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표공간에서 점 $(x_1, y_1, z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

이다.

(나) 도형 $F$의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영을 $F'$이라 하고, 도형 $F$를 포함하는 평면이 평면 $\alpha$와 이루는 각의 크기를 $\theta$, 도형 $F$와 도형 $F'$의 넓이를 각각 $S, S'$이라고 하면

$$S' = S\cos\theta$$

이다.

(다) 평면 $\alpha$ 위에 있지 않은 한 점 P, 평면 $\alpha$ 위의 직선 $l$, 직선 $l$ 위의 한 점 Q, 직선 $l$ 위에 있지 않은 평면 $\alpha$ 위의 한 점 R에 대하여 다음이 성립한다.

$$\overline{\mathrm{PR}} \perp \alpha,\ \overline{\mathrm{RQ}} \perp l \text{ 이면 } \overline{\mathrm{PQ}} \perp l$$

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

좌표공간에 평면 $\alpha$와 직선 $l$은

$$\alpha : x+2y-2z+1=0,$$

$$l : \frac{x+1}{4} = 1-y = z-1$$

이다. 중심이 점 $\mathrm{P}(-1, 1, 1)$이고 반지름의 길이는 각각 $7, 7\sqrt{2}$인 두 동심원 $O_a, O_b$가 평면 $\alpha$ 위에 있다. 인공위성 A, B는 각각 동심원 $O_a, O_b$를 따라 일정한 속력으로 이동한다. 중심이 직선 $l$ 위에 있고 반지름의 길이가 10인 원 $O_c$는 평면 $\alpha$ 위에 있지 않다. 인공위성 C는 원 $O_c$를 따라 이동한다. 장박사는 점 $\mathrm{H}(14, 16, 1)$의 위치에서 인공위성을 관찰한다. 다음 물음에 답하시오. (단, 인공위성 A, B, C를 각각 점 A, B, C라 하고, 인공위성 A의 회전축은 원 $O_a$의 중심을 지나고 원 $O_a$를 포함하는 평면과 수직인 직선이다.)

【2-1】 인공위성 A가 원 $O_a$를 따라 한 바퀴 이동할 때, A와 H 사이의 거리의 최솟값을 구하시오. (30점)

【2-2】 두 인공위성 A, B는 시간당 원 $O_a, O_b$를 따라 각각 네 바퀴, 두 바퀴씩 돈다. 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음은 $\angle\mathrm{APB} = \theta$일 때, 두 인공위성 A, B 사이의 거리를 구하는 과정이다.

> $\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{PA}},\ \vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{u} - \vec{v}$이다. 따라서
>
> $$\overline{\mathrm{AB}}^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 49 + \boxed{①} - 2\vec{u}\cdot\vec{v}$$
> $$= 49 + \boxed{①} - \boxed{②}\cos\theta$$
>
> 이다.

①, ②에 알맞은 값을 구하시오. (10점)

(2) 두 인공위성 A, B가 최단거리에 위치한 후 처음으로 $\angle\mathrm{APB}$의 크기가 $45°$가 될 때, 두 인공위성 A, B 사이의 거리의 시간(분)에 따른 변화율을 구하시오.
(단, 두 인공위성이 최단거리에 위치할 때 A의 속도벡터는 B의 속도벡터의 양의 실수배이고, 회전속력의 단위는 라디안/분 이다.)
(30점)

【2-3】 인공위성 C의 회전축은 두 인공위성 A, B의 회전축과 만나고, 원 $O_c$의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영의 넓이는 $50\sqrt{2}\pi$이다. 인공위성 C의 회전축의 방향벡터를 $(2, p, q)$라 할 때, $6p-q = m+n\sqrt{2}$이다. 순서쌍 $(m, n)$을 모두 구하시오.
(단, $m, n$은 정수이다.) (50점)

# 수학(문제 3)

[3] 다음 글을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f : X \to Y$가 일대일 대응일 때

(a) $f$의 역함수 $f^{-1} : Y \to X$가 존재한다.

(b) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

(나) 미분가능한 함수 $t = g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$이면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(t)\, dt$$

이다.

※ 모든 문항에서 풀이과정을 반드시 기술하시오.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(a) 함수 $f(x)$는 미분가능한 역함수 $f^{-1}(x)$를 갖는다.

(b) 모든 실수 $x$에 대하여

$$f(x+2) = f(x) + 2,\ f(x) = -f(-x)$$

이다.

(c) 실수 $a$에 대하여 $f(a) = a$이면 $a$는 정수이다.

(d) $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = \frac{2}{3}$

함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

【3-1】 $\int_{0}^{1} g(x)\, dx$의 값을 구하시오. (20점)

【3-2】 모든 실수 $x$에 대하여 $g(x+1) + g(1-x) = 0$이 성립함을 증명하시오. (30점)

【3-3】 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 방정식 $g(x) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 개수는 두 개임을 증명하시오. (30점)

【3-4】 $\int_{1}^{20} x^2 |g(x)|\, dx - \int_{0}^{1} (19x^2 - 40x + 40)\, g(x)\, dx$의 값을 구하시오. (40점)

# 2020학년도 논술(AAT) 고사 예시 답안 및 채점 기준(자연계열Ⅰ)

## 자연계열 Ⅰ 1번 예시 답안

【1-1】

$\mathrm{P}(A)=x$라 하면 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A^C\cap B)$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=2x$이다.

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-2x$이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$이므로 $1-2x=3x$ 이다.

따라서 $x=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$이고 $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{3}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B^C\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{1-\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{3}{4}$$ 이다.

【1-2】

(1) 이산확률변수 $X$의 확률분포와 조건에 의해서

$\mathrm{E}(X)=\sum_{j=1}^{k}j\times\mathrm{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{k}j^2\times\mathrm{P}(X=1)=p_1\sum_{j=1}^{k}j^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}p_1$이고

$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{j=1}^{k}j^2\times\mathrm{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{k}j^3\times\mathrm{P}(X=1)=p_1\sum_{j=1}^{k}j^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2p_1$이다.

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{10}{3}\mathrm{E}(X)$이므로 $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2p_1=\frac{10}{3}\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}p_1$이고

$9k^2-31k-20=(k-4)(9k+5)=0$을 만족시킨다. 따라서 $k=4$이다.

그리고 $\sum_{j=1}^{4}\mathrm{P}(X=j)=(1+2+3+4)p_1=1$이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{10}$이다.

(2) 방정식 $x^3-(a+1)x^2+2(a-1)x-a+2=(x-1)\{x^2-ax+(a-2)\}=0$의 서로 다른 세 실근은 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$이다. $\alpha=1$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해서 $\beta+\gamma=a$이고 $\beta\gamma=a-2$이므로 $\mathrm{E}(Y)=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{1+a}{3}$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y)&=\frac{1^2+\beta^2+\gamma^2}{3}-\left(\frac{1+a}{3}\right)^2=\frac{1+(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma}{3}-\frac{(a+1)^2}{9}\\&=\frac{1+a^2-2(a-2)}{3}-\frac{(a+1)^2}{9}=\frac{2(a^2-4a+7)}{9}\end{aligned}$$

이다. $\mathrm{V}(Y)=\frac{2}{3}$이므로 $a^2-4a+4=(a-2)^2=0$이다. 따라서 $a=2$이다.

【1-3】

확률변수 $X$가 평균이 $m$이고 표준편차가 $\sigma$인 정규분포를 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 11)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{11-m}{\sigma}\right)=0.1587$이고 $\mathrm{P}(X\ge 6)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{6-m}{\sigma}\right)=0.9772$이다.

표준정규분포표로부터 $\frac{11-m}{\sigma}=-1$이고 $\frac{6-m}{\sigma}=-2$이므로 $m=16$이고 $\sigma=5$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\le X\le 21)&=\mathrm{P}\left(\frac{1-16}{5}\le Z\le\frac{21-16}{5}\right)=\mathrm{P}(-3\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.4987+0.3413=0.84\end{aligned}$$

이다.

## 자연계열 Ⅰ 1번 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 【1-1】 | $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A^C \cap B)$, $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$ 중 하나를 구하면 10점<br>$\mathrm{P}(B^C \vert A^C)$을 구하면 10점<br>$\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A^C \cap B)$, $\mathrm{P}(A^C \cap B^C)$값을 구하지 않고 $\mathrm{P}(B^C \vert A^C)$을 구하면 20점 | 20 |
| 【1-2】 (1) | $k=4$를 구하면 20점<br>$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{10}$을 구하면 10점 | 30 |
| 【1-2】 (2) | $\mathrm{E}(X)=\frac{1+a}{3}$을 구하면 10점<br>$\mathrm{V}(X)=\frac{2(a^2-4a+7)}{9}$을 구하면 10점<br>$\mathrm{E}(X)=\frac{1+a}{3}$를 구하지 않고 $\mathrm{V}(X)=\frac{2(a^2-4a+7)}{9}$을 구하면 20점<br>$a=2$를 구하면 10점 | 30 |
| 【1-3】 | 평균 $m$과 표준편차 $\sigma$를 구하면 각각 10점<br>$\mathrm{P}(1 \le X \le 21)$을 구하면 10점<br>평균 $m$과 표준편차 $\sigma$를 구하지 않고 $\mathrm{P}(1 \le X \le 21)$을 구하면 30점 | 30 |

## 자연계열 Ⅰ 2번 예시 답안

**【2-1】**

점 H에서 평면 $\alpha$에 내린 수선의 발 R와 점 P를 연결하는 (평면 $\alpha$위의) 선분과 인공위성 A가 이동하는 원 $O_a$와의 교점을 Q라 하자. 인공위성 A가 점 Q에 위치할 때, 점 A와 점 H사이의 거리가 최소가 된다.

$$\overline{\mathrm{PH}} = 15\sqrt{2}\text{ 이고 } \overline{\mathrm{HR}} = \frac{|1\times 14+2\times 16-2\times 1+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 15\text{ 이므로}$$

피타고라스 정리를 사용하면

$\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2-\overline{\mathrm{HR}}^2} = 15$, $\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PR}} - \overline{\mathrm{PQ}} = 8$이고, $\overline{\mathrm{HQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{HR}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2} = 17$이다.

(별해)

점 H에서 평면 $\alpha$에 내린 수선의 발 R와 점 P를 연결하는 (평면 $\alpha$위의) 선분과 인공위성 A가 이동하는 원 $O_a$와의 교점을 Q라 하자. 인공위성 A가 점 Q에 위치할 때, 점 A와 점 H사이의 거리가 최소가 된다.

점 H를 지나면서 평면 $\alpha$와 수직인 직선의 벡터 방정식은 $(t+14, 2t+16, -2t+1)$이다. 이것을 평면 $\alpha$의 방정식에 대입하면 $t=-5$임을 구할 수 있고, 따라서 수선의 발 R의 좌표는 $(9, 6, 11)$이다.

$$\overline{\mathrm{PR}} = 15,\ \overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PR}} - \overline{\mathrm{PQ}} = 8\text{ 이고 } \overline{\mathrm{HR}} = \frac{|1\times 14+2\times 16-2\times 1+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 15\text{ 이므로}$$

$\overline{\mathrm{HQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{HR}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2} = 17$이다.

**【2-2】**

(1) ①과 ②에 알맞은 값은 각각 $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2 = 98,\ 2|\vec{u}||\vec{v}| = 98\sqrt{2}$ 이다.

(2) 두 인공위성이 최단거리에 위치했을 때의 시간을 $t=t_0$(분)이라 하고 그 때의 인공위성 A의 위치를 점 T라 하면, $\angle\mathrm{APT}$와 $\angle\mathrm{BPT}$의 차이의 시간에 따른 변화율은 $t_0 \le t < t_0+15$에서

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{8\pi}{60} - \frac{4\pi}{60} = \frac{\pi}{15}$$

이다.

또한, 시간 $t\,(t_0 \le t < t_0+15)$에서 인공위성 A와 인공위성 B사이의 거리를 $D=D(t)$, $\angle\mathrm{APB}$를 $\theta=\theta(t)$라 하면, (1)에 의하여

$$D^2 = 49+98-98\sqrt{2}\cos\theta \ \Rightarrow\ 2D\frac{dD}{dt} = 98\sqrt{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\ (*)$$

이다.

두 인공위성이 최단거리에 위치한 후 처음으로 $\angle\mathrm{APB} = 45^\circ\left(t=t_0+\frac{15}{4}\right)$가 될 때 $\frac{d\theta}{dt}$의 값은 $\frac{\pi}{15}$이고 $D=7$이다.

따라서 (*)에 의해 $t=t_0+\frac{15}{4}$일 때 $\frac{dD}{dt}$의 값은 $\frac{7}{15}\pi$이다.

**【2-3】**

두 벡터 $\vec{e} = (1, 2, -2)$, $\vec{f} = (4, -1, 1)$은 각각 평면 $\alpha$의 법선벡터, 직선 $l$의 방향벡터이다.

벡터 $\vec{y} = (2, p, q)$는 인공위성 C의 회전축의 방향벡터이다. 벡터 $\vec{z} = (c, d, e)$는 벡터 $\vec{f}$와 수직이면서 평면 $\alpha$와 평행하다고 하면 $\vec{f}\perp\vec{z}$, $\vec{e}\perp\alpha$ 이므로 제시문 (다)에 의하여 다음의 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \vec{f}\cdot\vec{z} = 4c-d+e = 0 \\ \vec{e}\cdot\vec{z} = c+2d-2e = 0 \\ \vec{y}\cdot\vec{z} = 2c+pd+qe = 0 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $c=0$이고 $d=e$이다. $d \neq 0$이므로 $p+q=0$이다. 따라서 $\vec{y}=(2,\, p,\, -p)$ 또는 $\vec{y}=(2,\, -q,\, q)$이다.

한편, 직선 $l$은 평면 $\alpha$위에 있으므로 원 $O_c$의 중심은 평면 $\alpha$위에 있다. 원 $O_c$의 넓이는 $100\pi$이므로 그것을 평면 $\alpha$에 정사영 시켰을 때, 그 정사영으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $50\sqrt{2}\pi$이므로 제시문 (나)에 의하여 벡터 $\vec{f}$와 벡터 $\vec{y}$가 이루는 각의 크기는 $45^\circ$ 또는 $135^\circ$ 이다. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4-p}{\sqrt{9(p^2+2)}}$ 에서 $p$는 이차방정식 $7p^2+16p-14=0$의 해가 되므로 $p=-q=\frac{-8\pm 9\sqrt{2}}{7}$ 이고 $6p-q=7p=-8\pm 9\sqrt{2}$ 이다.

그러므로 $(m,\, n)=(-8,\, \pm 9)$이다.

## 자연계열 Ⅰ 2번 채점 기준

<table>
<tr><th>하위문항</th><th colspan="3">채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="4">【2-1】</td><td>$\overline{\mathrm{PH}}=15\sqrt{2}$ 를 구하면 5점</td><td rowspan="2">또는</td><td rowspan="2">수선의 발 R 의 좌표 $(9,6,11)$를 계산하면 10점</td><td rowspan="4">30</td></tr>
<tr><td>$\overline{\mathrm{HR}}=15$를 구하면 5점</td></tr>
<tr><td colspan="3">인공위성 A가 점 Q에 위치할 때, 점 A와 점 H사이의 거리가 최소가 됨을 명시하면 10점</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\overline{\mathrm{HQ}}=17$을 구하면 10점</td></tr>
<tr><td rowspan="2">【2-2】<br>(1)</td><td colspan="3">$\vec{v}\cdot\vec{v}=98$을 구하면 5점</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td colspan="3">$2\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert=98\sqrt{2}$ 를 구하면 5점</td></tr>
<tr><td rowspan="3">【2-2】<br>(2)</td><td colspan="3">$2D\frac{dD}{dt}=98\sqrt{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$ 를 구하면 15점<br>($D$를 $D=\sqrt{(7\cos\theta_1-7\sqrt{2}\cos\theta_2)^2+(7\sin\theta_1-7\sqrt{2}\sin\theta_2)^2}$ 또는 $D=\sqrt{(7\cos 2\theta-7\sqrt{2}\cos\theta)^2+(7\sin 2\theta-7\sqrt{2}\sin\theta)^2}$ 로 표현하면 10점)</td><td rowspan="3">30</td></tr>
<tr><td colspan="3">$t=t_0+\frac{15}{4}$일 때 $\frac{d\theta}{dt}$의 값은 $\frac{\pi}{15}$를 구하면 5점</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\frac{dD}{dt}=\frac{7}{15}\pi$ 를 구하면 10점</td></tr>
<tr><td rowspan="4">【2-3】</td><td colspan="3">$p=-q$ 임을 유도하면 30점</td><td rowspan="4">50</td></tr>
<tr><td colspan="3">정사영을 이용하여 직선 $l$과 인공위성 $C$의 회전축이 이루는 각 $\theta$의 크기가 $45^\circ$, 즉 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$임을 구하면 5점</td></tr>
<tr><td colspan="3">이차방정식 $7p^2+16p-14=0$을 유도하면 5점</td></tr>
<tr><td colspan="3">$(-8,9),(-8,-9)$를 구하면 각각 5점</td></tr>
</table>

## 자연계열 Ⅰ 3번 예시 답안

**【3-1】**

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 조건 $(b)$, $(c)$에 의해 $f(0)=0, f(1)=1$이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_0^1 \left(f(x)+f^{-1}(x)\right)dx=1$이다. 따라서 $\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=1-\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}$이고 $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$이다.

(물론, $\int_0^1 g(x)\,dx=2\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^2 (f(x)+f^{-1}(x))\,dx=\frac{1}{3}$으로도 구할 수 있다.)

**【3-2】**

$y=f(x)$라 하면, 조건 $(b)$에 의해 $f^{-1}(y)+2=x+2=f^{-1}(y+2)$이고 $f^{-1}(-y)=-x=-f^{-1}(f(x))=-f^{-1}(y)$이다.

즉, $f^{-1}$도 $(b)$를 만족시킨다.

$$\begin{aligned} g(x+1)+g(1-x) &= f(x+1)-f^{-1}(x+1)+f(1-x)-f^{-1}(1-x) \\ &= f(x-1)+2-f^{-1}(x-1)-2-f(x-1)+f^{-1}(x-1)=0 \end{aligned}$$

이다.

**【3-3】**

$(b)$로부터 $f(0)=f^{-1}(0)=0$, $f(1)=f^{-1}(1)=1$이고 $g(0)=0=g(1)$이다.

한 편, $0=g(x_0)$인 $x_0\in(0,1)$이라고 한다면

$0=g(x_0)=f(x_0)-f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)=f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow f(f(x_0))=x_0$

이다. 이때, $f(0)=0$, $f(1)=1$이고 $f(x)$는 역함수를 갖기 때문에 증가함수이다. 만약 $f(x_0)\ge x_0$이면 $x_0=(f\circ f)(x_0)\ge f(x_0)$이고 이는 $f(x_0)=x_0$이다. 같은 방법으로 $f(x_0)\le x_0$일 때도 $f(x_0)=x_0$를 보일 수 있다. 조건 (c)로부터 $x_0\in(0,1)$는 모순이다. 따라서 닫힌 구간 $[0,1]$에서 $g(x)=0$의 실근은 0과 1뿐이다.

**【3-4】**

【3-2】풀이 과정에서 구한 $f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$이므로 $g(x)=-g(-x)$이고 【3-2】에 의해 $g(x)=g(x+2)$이다.

$$\begin{aligned} \int_0^{20} x^2|g(x)|\,dx &= \sum_{k=0}^{9}\int_{2k}^{2k+2} x^2|g(x)|\,dx && (x=2k+t) \\ &= \sum_{k=0}^{9}\int_0^2 (t+2k)^2|g(t)|\,dt && (\because g(x+2)=g(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{9}\left(\int_0^1 (t+2k)^2|g(t)|\,dt+\int_1^2 (t+2k)^2|g(t)|\,dt\right) && (t=s+1)\ \&\ \textbf{【3-2】} \\ &= \sum_{k=0}^{9}\left(\int_0^1 (t+2k)^2|g(t)|\,dt+\int_0^1 (s+2k+1)^2|g(1-s)|\,ds\right) && (r=1-s) \\ &= \sum_{k=0}^{9}\int_0^1 \left\{(r+2k)^2+(-r+2k+2)^2\right\}|g(r)|\,dr \end{aligned}$$

【3-3】과 조건 $(d)$에 의해 $g(x)$는 열린 구간 $(0,1)$에서 양수이므로

$$\int_0^{20} x^2|g(x)|dx=8\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)\sum_{k=0}^{9}(k^2+k)+10\int_0^1 (4-4x+2x^2)g(x)\,dx$$

이다. 【3-1】에서 구한 $\int_0^1 g(t)\,dt=\frac{1}{3}$를 이용하면

$\int_0^{20} x^2|g(x)|\,dx = \sum_{k=0}^{9}\int_{2k}^{2(k+1)} x^2|g(x)|\,dx = \frac{8}{9}\times 10\times 9\times 11 + 10\int_0^1 (4-4x+2x^2)g(x)\,dx$이고

$\int_1^{20} x^2|g(x)|\,dx = \frac{8}{9}\times 10\times 9\times 11 + \int_0^1 (40-40x+19x^2)g(x)\,dx$ 이므로 답은 880이다.

## 자연계열 Ⅰ 3번 채점 기준

| 하위문항 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| 1 | $f(0)=0$ | 5점 |
| | $f(0)=0,\ f(1)=1$ | 5점 |
| | $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{3}$ | 10점 |
| 2 | $f^{-1}(y)+2 = f^{-1}(y+2)$ (증명 없이 언급 5점) | 10점 |
| | $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$(증명 없이 언급 5점) | 10점 |
| | $g(x+1)+g(1-x)=0$ | 10점 |
| | ※$g$는 (1,0) 대칭을 이용을 하여 보일 수 있음<br>맞게 증명을 하면 30점(틀릴 시 대칭을 언급하면 10점) | |
| 3 | $g(0)=0$ | 5점 |
| | $g(1)=0$ | 5점 |
| | $x_0 \in (0,1)$인 $0=g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$임을 보이면 | 10점 |
| | (c)를 이용하여 모순임을 보이면 | 10점 |
| | ※ 답이 0,1뿐임을 언급하면 5점 | |
| 4 | $g(x)=g(x+2)$를 구하면 | 10점 |
| | 【3-3】과 조건 $(d)$에 의해 $g(x)$는 열린 구간 $(0,1)$에서 양수임을 알면 | 5점 |
| | $\int_0^{20} x^2|g(x)|dx = 8\left(\int_0^1 g(x)dx\right)\sum_{k=0}^{9}(k^2+k) + 10\int_0^1 (4-4x+2x^2)g(x)dx$을 구하면 | 15점 |
| | ※ 분할 언급 5점 | |
| | ※ 치환적분 언급 5점 | |
| | 880을 구하면 | 10점 |