[이학계열 1번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	이학계열(수학) / 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 Ⅱ
	핵심개념 및 용어	최댓값, 최솟값, 실근, 도함수, 극한, 극댓값, 극솟값, 극값
예상 소요 시간	60분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

【문제 1】(70점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오. (답만 기재하면 0점 처리)

가) 함수 $f(x)$가 a를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$를 만족하면 $f(a)$를 '극댓값'이라 하고, 반대로 a를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$를 만족하면 $f(a)$를 '극솟값'이라 한다.

나) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(a)$는 극댓값이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$는 극솟값이다.

다) 두 양수 a, b에 대하여 항상 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$가 성립하고 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

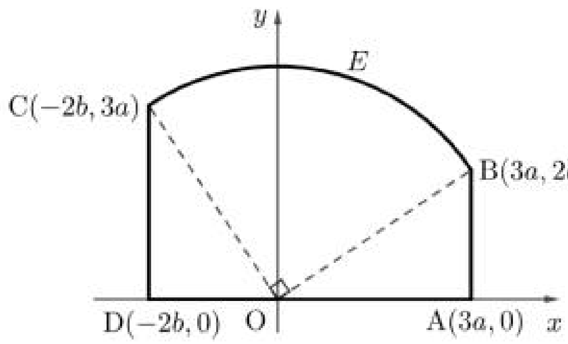
라) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$를 포함하는 열린구간에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

[문제 1-1] $a>0$인 실수 a에 대하여 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9a^2x+6a-5$의 극솟값을 $g(a)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $g(a)$의 최댓값을 구하시오.

(2) $g(a)$가 최대일 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 구하시오.

[문제 1-2] 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(3a, 0)$, $\mathrm{B}(3a, 2b)$, $\mathrm{C}(-2b, 3a)$, $\mathrm{D}(-2b, 0)$에 대하여 도형 E는 [그림 1]과 같이 삼각형 OAB, 삼각형 OCD, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OBC로 이루어진 도형이다.



[그림 1]

$9a^2 + 4b^2 = 36a^2b^2$**일 때, 도형 E의 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, $a > 0$, $b > 0$, O는 원점)**

[문제 1-3] 곡선 $y = x^2$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(\alpha, \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta, \beta^2)$에 대하여, 점 A에서의 접선을 l, 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $\alpha > 0$)

(1) 접선 l과 x축과의 교점을 P, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 곡선 $y = x^2$, x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 삼각형 APQ의 넓이를 T라 할 때, $\dfrac{T}{S}$의 값을 구하시오.

(2) 두 접선 l과 m이 서로 수직일 때, 두 접선 l, m의 교점을 $\mathrm{C}(p, q)$라 하자. q의 값을 구하시오.

(3) 위의 (2)에서 구한 점 $\mathrm{C}(p, q)$와 한 점 $\mathrm{D}(\alpha, q)$에 대하여 삼각형 ACD의 넓이를 $S(\alpha)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} \frac{S(\alpha)}{\alpha^3}$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

함수는 자연에서 대상의 관계를 수학적으로 표현하는 언어이며 자연의 형상을 수학적으로 표현한 대상이 도형이다. 본 문제에서는 도형의 성질을 함수관계로 적어보고 함수의 성질을 이용하여 최적화되는 경우와 다양한 기하적인 상황을 파악할 수 있는 능력의 유무를 평가한다.

[문제1-1]
도함수를 이용하여 그래프의 개형을 이해할 수 있는 지를 평가하는 문항이다.

(1) 함수의 도함수를 이용하면 삼차 이상의 고차 다항함수의 그래프를 정교하게 그릴 수 있다. 그리고 미분가능한 함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$인 사실을 이용하면 극값을 갖는 x의 위치를 알 수 있다. 본 문제는 이러한 도함수와 함수의 관계를 이용하여 어디서 극값을 갖는지와 함수의 계수가 변할 때 극솟값의 변화를 살펴 극솟값의 최대를 구할 수 있는지를 평가한다.
(2) (1)과 더불어 방정식 $f(x) = 0$의 해는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 x절편과 같기 때문에 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 해를 판별할 수 있는지도 평가한다.

[문제1-2]
산술평균과 기하평균에 대한 부등식을 활용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다.
도형의 분할을 이용하면 다양한 도형의 넓이를 구할 수 있다. 도형의 분할의 부분인 작은 도형이 우리가 넓이를 쉽게 알 수 있는 도형이라면 각 작은 도형의 넓이의 합을 이용하여 넓이를 구할 수 있다. 본 문제에서 제시한 도형은 두 개의 삼각형과 부채꼴로 이루어진 도형이므로 이들의 넓이를 구하는 방법을 사용하면 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는데, 이때 각 길이가 문자로 주어졌을 때, 문자로 이루어진 식을 계산할 수 있는지 평가한다. 또한 변하는 문자로 구성된 넓이의 식을 함수로 이해하여 직사각형의 크기가 변할 때 넓이가 변하는 정도를 측정할 수 있는지 평가한다. 이때, 넓이의 최솟값을

절대부등식인 산술평균과 기하평균에 대한 부등식의 성질을 활용하여 구할 수 있는지도 평가한다.

[문제1-3]
이차함수의 그래프의 특성을 파악할 수 있는지를 평가하고 이차함수의 그래프와 접선, 그리고 x축으로 이루어진 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이차함수의 그래프의 밖의 한 점에서 서로 수직인 두 개의 접선을 그릴 수 있는데, 이렇게 서로 수직인 두 접선의 교점은 특별한 성질을 가진다. 본 문제는 두 접선이 가지는 그 성질을 파악할 수 있는지 평가한다.

(1) 접선과 이차함수의 그래프, 그리고 x축으로 둘러싸여 만들어지는 도형의 넓이와 특정 삼각형의 넓이 사이의 비를 구할 수 있는지 평가한다.
(2) 이차함수의 그래프에 접하면서 수직인 두 직선의 교점을 구할 수 있는지를 평가한다.
(3) 주어진 조건을 만족하는 직각삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 평가하고, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있는 지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	**[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **[수학]-(3) 수와 연산-② 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(3) 적분-③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 1-1 (1)	**[수학]-(1) 문자와 식-① 다항식의 연산** [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. **[수학]-(1) 문자와 식-③ 인수분해** [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. **[수학]-(1) 문자와 식-⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-12] 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-② 도함수** [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문제 1-1 (2)	**[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-2	**[수학]-(1) 문자와 식-① 다항식의 연산** [10수학01-01] 다항식의 사칙연산을 할 수 있다. **[수학]-(3) 수와 연산-② 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

문제 1-3 (1)	**[수학Ⅱ]-(2) 미분-② 도함수** [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(3) 적분-② 정적분** [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(3) 적분-③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문제 1-3 (2)	**[수학]-(1) 문자와 식-⑤ 이차방정식과 이차함수** [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학]-(2) 기하-② 직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-② 도함수** [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-3 (3)	**[수학]-(1) 문자와 식-⑤ 이차방정식과 이차함수** [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학]-(2) 기하-② 직선의 방정식** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. **[수학Ⅱ]-(1) 함수의 극한과 연속-① 함수의 극한** [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-② 도함수** [12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ]-(2) 미분-③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2020	10-20 31-36 67-71 76-82 128-132 209-212
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2020	11-16 28-30 62-63 73-77 122-124 195-196
	수학	홍성복 외	지학사	2020	10-19 34-37 70-72 81-83 131-133
	수학	박교식 외	동아출판	2020	11-16 25-29 62-63 74-75 118-121

	수학	류희찬 외	천재교과서	2020	12-21 30-36 64-49 75-78 127-135
	수학II	이준열 외	천재교육	2020	20–25 60–69 74–77 83–97 132–139
	수학II	홍성복 외	지학사	2020	20–25 75–77 83–89 94–98 141–147
	수학II	배종숙 외	금성출판사	2020	23-26 73-74 83-91 98-100 138-139
	수학II	권오남 외	㈜교학사	2020	21-25 80-82 88-95 100-102 142-148
	수학II	김원경 외	비상	2020	18-24 71-73 78-85 93-95 125-131
기타					

5. 문항 해설

본 문제는 미분을 이용하여 함수의 그래프 개형을 알고, 이를 이용하여 방정식의 해를 구별할 수 있는지를 평가한다. 그리고 특정 조건이 주어진 상황에서 함수의 최솟값을 구하는 다양한 방법을 알고 이 중 적절한 방법을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다. 끝으로 이차함수의 그래프와 접선의 성질을 통해 이들이 가지는 특별한 성질을 도출할 수 있는지와 곡선과 직선이 이루는 부분의 넓이를 정적분과 도형의 넓이 공식을 이용하여 구할 수 있는지도 평가한다.

[문제1-1]

(1) 함수 $f(x)$의 계수가 변할 때 극솟값의 최댓값을 구하는 문제이다.

(2) 극솟값이 최대가 되는 순간의 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 알고 이를 활용하여 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 구하는 문제이다.

[문제1-2]

도형의 넓이를 식으로 나타내고 주어진 조건을 만족하는 상황에서 넓이의 최솟값을 구하는 문제이다.

[문제1-3]

(1) 이차함수의 그래프와 그 접선 및 x축으로 둘러싸인 넓이와 접선과 x축이 만드는 삼각형의 넓이의 비를 구하는 문제이다.

(2) 이차함수의 접선 중 서로 수직인 두 접선의 교점의 y좌표를 구하는 문제이다.

(3) 이차함수의 두 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 교점과 접점, 그리고 접점을 지나고 y축에 수직인 직선과 접선들의 교점을 지나고 x축에 수직인 직선이 만나는 교점을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형의 넓이와 원점과 접점을 대각선으로 하고 각 변이 축과 평행인 직각삼각형의 넓이의 비의 극한값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위문항</th><th>채점기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1-1</td><td>(1) a가 변할 때 함수 $f(x)$의 극솟값의 최댓값을 구할 수 있다.
• $f'(x)=0$인 x를 구하면 (2점)
• 증감표를 이용하여 함수 $f(x)$의 극솟값 $g(a)$를 구하면 (3점)
• $g'(a)=0$인 a를 구하면 (2점)
• 함수 $g(a)$의 증감표를 이용하여 최댓값을 구하면 (3점)</td><td>10점</td></tr>
<tr><td>(2) $g(a)$가 최대일 때 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 구할 수 있다.
• (1)의 증감표를 이용하여 $a=\frac{1}{3}$일 때의 증감표를 구하고 $x=-1$일 때 함수 $f(x)$가 극댓값을 가짐을 보이면 (3점)
• $f(-1)$의 값을 정확히 구하면 (3점)
• 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호를 이용하여 실근의 개수를 정확히 구하면 (4점)</td><td>10점</td></tr>
<tr><td>1-2</td><td>도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.
• 넓이를 a와 b의 식으로 정확히 나타내면 (5점)
• 산술평균-기하평균 부등식을 이용하여 필요한 부등식을 구하면 (5점)
• 산술평균-기하평균 부등식으로부터 얻은 관계를 이용하여 최솟값을 정확히 구하면 (5점)</td><td>15점</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1-3</td><td>(1) 주어진 영역과 삼각형의 넓이의 비를 구할 수 있다.
• 접선의 방정식을 구하면 (4점)
• 삼각형의 넓이를 구하면 (2점)
• $y=x^2$과 접선, x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하면 (2점)
• 두 도형의 넓이의 비를 구하면 (2점)</td><td>10점</td></tr>
<tr><td>(2) 수직인 접선의 교점을 구할 수 있다.
• 접선의 방정식을 구하고 이를 이용하여 필요한 연립방정식을 구하면 (4점)
• 연립방정식을 풀어 교점의 x좌표를 구하면 (5점)
• 교점의 x좌표를 이용하여 교점의 y좌표를 구하면 (2점)
• 접선이 수직이라는 사실을 이용하여 교점의 y좌표를 정확히 구하면 (2점)</td><td>13점</td></tr>
<tr><td>(3) 주어진 극한을 구할 수 있다.
• 주어진 삼각형의 넓이를 구하면 (3점)
• 두 접선이 수직임을 이용하여 두 교점의 x좌표 사이의 관계를 구하면 (2점)
• 두 교점의 x좌표의 관계를 이용하여 넓이의 식을 완성하면 (4점)
• 극한값을 정확히 구하면 (3점)</td><td>12점</td></tr>
</table>

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제1-1]

(1) **(10점)**

$f'(x)=x^2-9a^2$이고 $x=\pm 3a$일 때, $f'(x)=0$이다. **(2점)**

$a>0$이므로 $f(x)$의 증감상태를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $x=3a$일 때 $f(x)$는 극솟값을 갖고

$$f(3a)=9a^3-27a^3+6a-5=-18a^3+6a-5$$

이므로 $g(a)=-18a^3+6a-5$이다. **(3점)**

이제 $g'(a)=-54a^2+6$이므로 $a=\pm\frac{1}{3}$일 때 $g'(a)=0$이다. **(2점)**

$a>0$이므로 이 범위에서 $g(a)$의 증감상태를 조사하면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		↗	극대	↘

위 표에서 $g(a)$는 $a=\frac{1}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

$$g\left(\frac{1}{3}\right)=-18\left(\frac{1}{3}\right)^3+6\left(\frac{1}{3}\right)-5=-\frac{11}{3}$$

이므로 $g(a)$는 $a=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $-\frac{11}{3}$을 갖는다. **(3점)**

정답) $-\frac{11}{3}$

(2) **(10점)**

(1)에서 $a=\frac{1}{3}$일 때 $g(a)$는 최대가 되고, 이때 $f(x)$의 증감상태를 조사하면 (1)에서의 증감표로부터 다음 증감표를 얻는다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

위 표에서 $x=-1$일 때 $f(x)$는 극대이고 **(3점)**

$$f(-1) = \frac{1}{3} \times (-1)^3 - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times (-1) + 6 \times \frac{1}{3} - 5$$
$$= -\frac{7}{3}$$

이 $f(x)$의 극댓값이다. **(3점)**

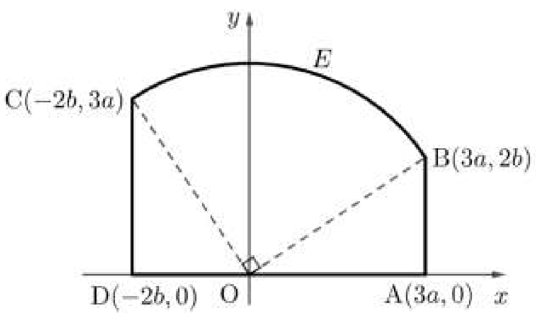
그런데 극댓값과 극솟값이 모두 음수이므로 $f(x)$의 그래프는 x축과 한번 만난다. 따라서 $f(x)=0$은 1개의 실근 갖는다. **(4점)**

정답) 1

[문제1-2]

(15점)

좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(3a, 0)$, $\mathrm{B}(3a,\ 2b)$, $\mathrm{C}(-2b, 3a)$, $\mathrm{D}(-2b, 0)$에 대하여 도형 E는 [그림 1]과 같이 삼각형 OAB, 삼각형 OCD, 그리고 중심각의 크기가 90° 인 부채꼴 OBC로 이루어진 도형이므로 넓이는 삼각형 OAB, 삼각형 OCD, 그리고 부채꼴 OBC의 넓이의 합과 같다.



[그림 2]

따라서 도형 E의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 3a \times 2b + \frac{1}{2} \times 3a \times 2b + \frac{1}{4}\pi(\sqrt{9a^2+4b^2})^2$$
$$= \frac{1}{4}\pi(9a^2+4b^2) + 6ab$$

이다. **(5점)**

그런데 $a^2 > 0$, $b^2 > 0$이므로 제시문 다)에 의하여

$$\frac{9a^2+4b^2}{2} \geq \sqrt{9a^2 \times 4b^2} = 6ab \ \cdots\cdots \ ①$$

이다. 이때 등호는 $9a^2 = 4b^2$일 때 성립하는데, $a > 0$, $b > 0$이므로 $3a = 2b$일 때 등호가 성립한다.

$9a^2 + 4b^2 = 36a^2b^2$이므로 ①에 의해서

$$18a^2b^2 \geq 6ab$$
$$ab \geq \frac{1}{3} \ \cdots\cdots \ ②$$

이다. **(5점)**

그러므로 도형 E의 넓이 S는 ①과 ②에 의해

$$S = \frac{\pi}{4}(9a^2+4b^2) + 6ab$$

$$\geq \frac{\pi}{4}\times 12ab+6ab=(3\pi+6)ab$$

$$\geq 3(\pi+2)\times\frac{1}{3}=\pi+2$$

이고 S는 등호가 성립할 때 최솟값을 가지므로 도형 E의 넓이 S는 최솟값 $\pi+2$를 갖는다. **(5점)**

(참고) $3a=2b$ 즉 $b=\frac{3}{2}a$일 때 (1)의 등호가 성립하고 그러면 (2)의 등호가 성립하여 $ab=\frac{1}{3}$이고 $a\times\left(\frac{3}{2}a\right)=\frac{1}{3}$, 즉 $a^2=\frac{2}{9}$이다. $a>0$, $b>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 S는 최솟값을 갖는다.

정답) $\pi+2$

[문제1-3]

(1) **(10점)**

함수 $y=x^2$의 도함수는 $y'=2x$이고

직선 l은 곡선 $y=x^2$의 (α,α^2)에서의 접선이므로 그 방정식은 $y=2\alpha x-\alpha^2$이고, x절편은 $\frac{1}{2}\alpha$이다. **(4점)**

삼각형 APQ의 넓이 T는

$$T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\alpha^2=\frac{1}{4}\alpha^3$$

이다. **(2점)**

그리고 곡선 $y=x^2$, x축, 그리고 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^{\alpha}x^2dx-(\triangle\mathrm{APQ}\text{의 넓이})$$

$$=\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha^3=\frac{1}{12}\alpha^3$$

이다. **(2점)**

따라서 $\frac{T}{S}=\frac{\frac{1}{4}\alpha^3}{\frac{1}{12}\alpha^3}=3$이다. **(2점)**

정답) 3

(2) **(13점)**

곡선 $y=x^2$의 수직인 두 접선 l과 m이 $y=x^2$의 그래프와 두 점 (α,α^2)과 (β,β^2)에서 각각 접한다고 하면, 직선 l과 m의 방정식은 각각

$$l:\ y=2\alpha x-\alpha^2$$
$$m:\ y=2\beta x-\beta^2$$

이고, 점 $\mathrm{C}(p,q)$는 두 접선의 교점이므로

$$\begin{cases}q=2\alpha p-\alpha^2\\ q=2\beta p-\beta^2\end{cases}$$

이다. **(4점)**

두 식을 연립하여 풀면,

$$2\alpha p-\alpha^2=2\beta p-\beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)p=\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$$

이므로 $p=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$이고, **(5점)**

$$\begin{aligned} q&=2\alpha p-\alpha^2=2\alpha\times\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\alpha^2 \\ &=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha^2=\alpha\beta \end{aligned}$$

이다. **(2점)**

두 직선은 서로 수직이므로 $4\alpha\beta=-1$이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{4}$이다.

따라서 $q=-\frac{1}{4}$이다. **(2점)**

정답) $-\frac{1}{4}$

(3) **(12점)**

점 A의 좌표는 (α,α^2)이고, (2)의 풀이과정에서 점 C의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},-\frac{1}{4}\right)$, 점 D의 좌표는 $\left(\alpha,-\frac{1}{4}\right)$이다. 따라서 삼각형 ACD의 넓이 $S(\alpha)$는

$$\begin{aligned} S(\alpha)&=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right) \\ &=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

이다. **(3점)**

그런데 두 접선 l과 m이 수직이므로 $\alpha\beta=-\frac{1}{4}$이고 $\beta=-\frac{1}{4\alpha}$이다. **(2점)**

따라서

$$\begin{aligned} S(\alpha)&=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{1}{4\alpha}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right) \\ &=\frac{(4\alpha^2+1)^2}{64\alpha} \end{aligned}$$

이다. **(4점)**

그러므로 구하는 극한값은

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{S(\alpha)}{\alpha^3}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{(4\alpha^2+1)^2}{64\alpha^4}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{16\alpha^4+8\alpha^2+1}{64\alpha^4}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{16+\frac{8}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}}{64}=\frac{1}{4}$$

이다. **(3점)**

정답) $\frac{1}{4}$

[이학계열 2번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	이학계열(인문사회) / 2번	
출제 범위	교육과정 과목명	통합사회
	핵심개념 및 용어	국제 분업, 무역의 확대, 인간의 삶, 긍정적·부정적 영향
예상 소요 시간	30분 / 90분	

2. 문항 및 자료

【문제 2】(30점)

※ 제시문과 도표를 참조하여 물음에 답하시오.

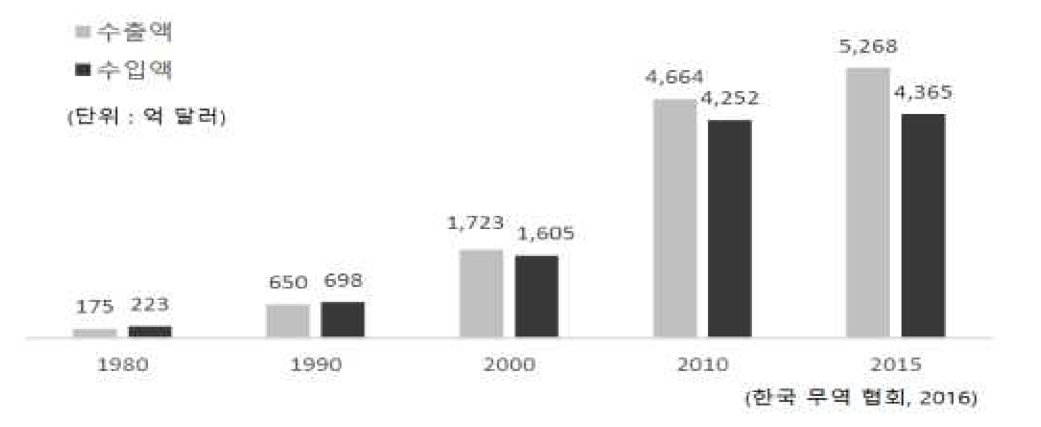
가)
국내에 정식으로 신고된 과자, 사탕, 초콜릿 등 수입 과자가 최근 10년 사이 약 두 배로 증가한 것으로 나타났다. 2015년 기준 미국에서 수입량이 2만 5,000톤으로 가장 많았고, 중국 1만 9,000톤, 독일 1만 1,000톤 등이 뒤를 이었다. 특히 자유 무역 협정(FTA) 체결 및 발효로 과자 수입량은 지난 해 대비 약 3배 증가하였다.

<연합뉴스> 2016 .2 .21.

나)
2004년 칠레와의 자유 무역 협정이 발효된 이후 2015년 한국과 칠레의 교역 규모는 약 61억 달러로 협정 발효 전인 2003년 16억 달러에서 약 4배 정도 늘었다. 같은 기간 우리나라의 세계 교역 규모가 2.6배 증가한 것과 비교하면 자유 무역 협정의 효과가 확실히 나타난 것이다. 그러나 이로 인한 문제도 있다. 우리나라는 칠레에 주로 자동차, 석유 제품, 무선통신 기기 등 기술집약적 제품을 수출하고 칠레로부터는 광물, 목재, 곡물, 과일 등의 원재료와 농산물을 수입한다. 현재 칠레산 수입 포도는 우리나라 수입 포도의 80%를 차지하고 있다. ...

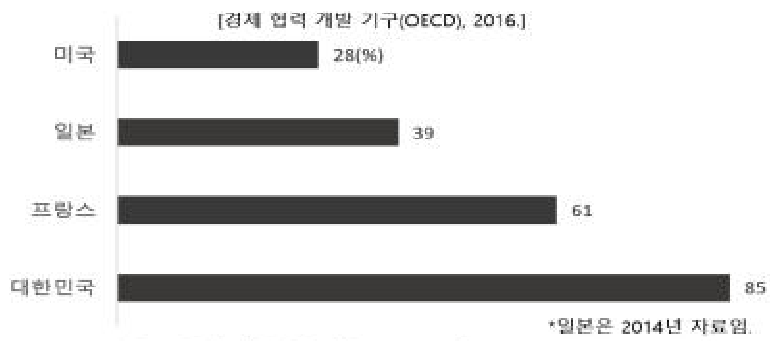
<관세청 자료집> 2016.

<도표 1>



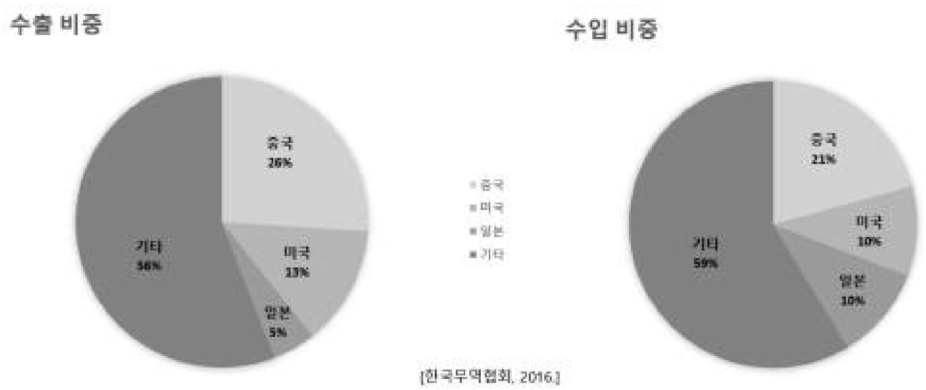
우리나라의 무역액 변화

<도표 2>



주요 국가의 무역 의존도(2015년)

<도표 3>



우리나라의 주요 무역 상대국(2015년)

[문제 2] 제시문 가), 나)와 <도표 1>에 나타난 현상이 우리의 삶에 미치는 긍정적 영향에 대해 기술하고, <도표 2>와 <도표 3>의 상황에서 생겨나는 문제점에 대해 논술하시오.(500자 내외, 띄어쓰기 제외)

3. 출제 의도

- 사회 현상을 올바르게 인식하고 인간과 공동체, 특히 시장경제와 국제무역이 수반하는 사회적 문제점을 파악할 수 있는지 평가함
- 사회 문제를 포괄적으로 이해하고 이를 제시할 수 있는지를 평가함
- 시각 자료를 해석하고 정보를 논리적으로 연계하여 자료에 담긴 중요 내용을 정확하게 제시할 수 있는 능력을 평가함
- 주어진 정보를 분석하고 종합하여 해석하는 능력이 있는지를 평가함
- 자기 성찰과 탐구력을 토대로 올바른 판단 능력과 바람직한 가치관이 확립되어 있는지, 자율적이고 통합적인 인격이 형성되어 있는지를 평가함
- 논증의 원리를 바탕으로 설득력 있게 논리를 전개하는 능력, 논거의 일관성과 타당성, 내용 조직의 체계성, 표현의 논리성과 명확성을 갖춘 글을 쓸 수 있는지를 평가함

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2018-162호 [별책 7] 사회과 교육과정
관련 성취기준	1. 교과명 : 사회

과목명 : 통합사회		관련
성취기준 1	[10통사05-03] 자원, 노동, 자본의 지역 분포에 따른 국제 분업과 무역의 필요성을 이해하고, 무역의 확대가 우리의 삶에 어떤 영향을 끼치는지 사례를 통해 탐구한다.	문제 2, 도표 1> 2> 3>

관련 성취기준	1. 교과명 : 사회

과목명 : 경제		관련
성취기준 1	[12경제04-01] 비교 우위에 따른 특화와 교역을 중심으로 무역 원리를 파악하고, 자유 무역과 보호 무역 정책의 경제적 효과를 이해한다.	문제 2

관련 성취기준	1. 교과명 : 국어		
	과목명 : 화법과 작문		**관련**
	성취기준 1	[12화작03-01] 가치 있는 정보를 선별하고 조직하여 정보를 전달하는 글을 쓴다.	도표 1> 2> 3>
	성취기준 2	[12화작03-05] 시사적인 현안이나 쟁점에 대해 자신의 관점을 수립하여 비평하는 글을 쓴다.	문제 2

나) 자료 출처

1) 교과서 내의 자료만 활용한 경우, ‘교과서 내’만 작성함

교과서 내

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
통합사회	육근록 외 6	동아출판	2017	151	<도표 1>	x
통합사회	구정화 외 9	천재교육	2017	163	<도표 2> <도표 3>	x
통합사회	정창우 외 12	미래앤	2017	146	제시문 가	x
통합사회	박병기 외 11	비상교육	2017	152	제시문 나	x

2) 교과서 외 자료를 활용한 경우

5. 문항 해설

본 논술 문제는 인간과 공동체에 대한 이해 특히, 시장경제와 국제 분업 및 무역의 필요성과 그 역할에 대한 비판적 이해 능력이 있는지 파악하기 위한 것이다. 이와 같은 논술의 형태는 ‘국제 분업 및 무역의 필요성과 그 영향’ (천재교육, 시장과 금융 소단원 3), ‘국제 분업과 무역이 필요한 이유는?’ (동아출판 ‘시장경제와 금융’ 소단원 4), ‘국제 분업과 무역’ (미래앤, 시장경제와 금융, 소단원 3), ‘국제 무역의 확대와 영향’ (비상, 시장경제와 금융, 소단원 3),과 같이 모든『통합사회』교과목에서 공통적으로 다루고 있는 핵심적인 교육 내용이고, 동시에 현대를 살아가기 위해서는 반드시 학습해야할 내용이라 할 수 있다. 이 문항은 국제 분업, 국제 무역의 확대가 우리의 삶에 어떤 영향을 미치는지 파악하고, 제시되어 있는 <도표>를 통해 국제 무역의 확대로 인해 발생하는 문제점을 파악하는 능력을 요구한다. 이 모든 과정들은『통합사회』5종 교과서가 공통으로 다루고 있는 내용이며, 창의융합 활동, 주제탐구나 주제토론을 통해 다루어지는 내용이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
	<도표 1>에 나타난 현상이 우리의 삶에 미치는 긍정적 영향에 대해 기술 (총 15점) **1) (제시문 가), (제시문 나)와 <도표 1>에서 국제 분업, 무역의 확대, 자유무역의 개념을 도출하는지 파악(5점)** [비교우위(특화)/ FTA(자유무역협정)에 대한 언급도 같은 맥락으로 인정됨] <도표 1>은 우리나라 무역액의 변화를 나타내는 표로서 1980년과 2015년의 무역액을 비교하면 수출은 약 30배, 수입은 약 20배 증가하였음 **2) (자유무역의 효과로) 국제분업이 활발해지면서(무역의 확대) 생겨나는 현상으로 우리 삶에 미치는 긍정적 영향 논술(10점)** **1개 4점, 2개 7점, 3개 이상 10점 부여** 1) 다양한 상품이나 서비스를 낮은 가격에 소비할 기회 증가. 소비 생활의 만족감 향상 2) 국내 기업의 경쟁력 강화에 기여. 질 좋은 상품을 싼 가격에 만들면서 생산성이 높아짐, 이 과정에서 경제 활성화, 일자리 창출 효과 발생. 3) 새로운 기술을 전파. 앞선 기술을 개도국에 제공, 경제 발전 기회를 제공 4) 문화 교류 활성화. 무역을 통한 문화 교류의 활성화는 다양한 문화를 누릴 기회를 제공, 지구촌 구성원의 삶의 질을 높힘. 등의 답이 가능함 * 점수 허용범위 안에서 도표에 대한 분석력, 논리성, 글의 완성도를 고려하여 부분 점수 부여 **<도표 2>와 <도표 3>의 상황에서 생겨나는 문제점에 대해 논술(15점)** **1) 우리나라가 무역 의존도가 높고, 특히 중국(미국, 일본) 의존도가 높다는 점을 지적(5점)** <도표 2>에서 볼 수 있듯이 우리나라는 무역의존도가 높은 국가임 미국의 3배, 일본의 2배에 가깝게 국제 분업과 무역에 의존하고 있음 <도표 3>에서 볼 수 있듯이 특히 중국과 일본, 미국에 의존도가 높음. **2) 무역의존도가 높은 현상이 수반하는 문제점 지적(10점)** **1개 4점, 2개 7점, 3개 이상 10점 부여** 1) 다른 나라의 경제 상황이 국내 경제에 미치는 파급 효과가 커짐. 미국의 금융 위기, 중국의 경제적 불안, 중국의 에너지 수급 문제는 우리나라 국민의 삶에 큰 영향을 미침 2) 경쟁력이 없는 국내 산업에 어려움을 줄 수 있음 3) 경쟁력이 낮은 기업이나 산업의 쇠퇴는 일자리와 소득 감소로 이어짐. 개인의 경제적 어려움 뿐 아니라 국가 전체적으로도 소득 불균형의 심화로 이어짐 등의 답이 가능함 * 점수 허용범위 안에서 도표에 대한 분석력, 논리성, 글의 완성도를 고려하여 부분 점수 부여	30점

7. 예시 답안 혹은 정답

(제시문 가)와 (제시문 나)는 국제 교역이 확대되는 추세라는 내용이며, <도표 1>은 우리나라 무역액의 변화를 나타내는 표로 1980년과 2015년의 무역액을 비교하면 수출은 약 30배, 수입은 약 20배 증가하였다. 국제 분업과 무역이 활발해짐으로 인해 우리의 삶에 큰 영향을 미치고 있다. 국제무역 확대의 긍정적인 영향은 1) 다양한 상품이나 서비스를 낮은 가격에 소비할 기회를 증가시킨다. 우리나라에서는 생산하기 힘든 제품을 저렴하게 구매함으로써 소비 생활의 만족감을 높일 수 있다. 2) 국내 기업의 경쟁력 강화에 기여한다. 국내 기업은 외국 시장을 개척하기 위해 기술혁신에 힘쓴다. 질 좋은 상품을 싼 가격에 만들면서 생산성이 높아지고, 이 과정에서 경제가 활성화되고 일자리가 늘어난다. 3) 새로운 기술을 전파한다. 경제 기반이 취약하거나 앞선 기술을 개도국에 제공하여 경제 발전의 기회를 제공한다. 4) 문화 교류를 활성화 한다. 무역을 통한 문화 교류의 활성화는 다양한 문화를 누릴 기회를 제공하고, 문화 교류를 활성화 하여 지구촌 구성원의 삶의 질을 높힌다.

<도표 2>에서 볼 수 있듯이 우리나라는 무역의존도가 높은 국가이다. 미국의 3배, 일본의 2배에 가깝게 국제 분업과 무역에 의존하고 있다. <도표 3>에서 볼 수 있듯이 우리나라는 특히 중국과 일본, 미국에 의존도가 높다. 무역의존도가 높아지면 생겨나는 문제점은 1) 국내외 충격이 국내 경제에 큰 영향을 미친다. 무역의 확대로 인해 다른 나라의 경제 상황이 국내 경제에 미치는 파급 효과가 커진다. 미국의 금융 위기, 중국의 경제적 불안, 중국의 에너지 수급 문제는 세계 경제에 부정적 영향을 미쳤는데, 최근 우리나라의 요소수 문제에서 볼 수 있듯이 우리나라처럼 무역의존도가 높은 나라는 상대적으로 큰 영향을 받을 수 있다. 즉 한 나라의 문제가 순식간에 다른 나라까지 확대될 수 있는 것이다. 2) 경쟁력이 없는 국내 산업에 어려움을 줄 수 있으며, 심한 경우 세계 시장에서 경쟁력을 갖추지 못한 분야는 완전히 무너질 수도 있다. 외국에서 수입되는 값싼 물건은 우리나라의 일부 산업 기반을 흔들 수 있다. 3)경쟁력이 낮은 기업이나 산업의 쇠퇴는 일자리와 소득 감소로 이어질 수 있다. 개인의 경제적 어려움 뿐 아니라 국가 전체적으로도 소득 불균형의 심화를 가져올 수 있다.