[공학계열 1번]

1. 일반 정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술우수자전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">공학계열(수학) / 1번</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학, 수학I, 수학II</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>함수와 그래프, 수열, 삼각함수, 함수의 극한과 연속</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">45분 / 90분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

가) 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq 0)$의 그래프는 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다. 이때 이 함수의 정의역은 $\{x \mid x\neq p$인 실수$\}$이고,
치역은 $\{y \mid y\neq q$인 실수$\}$이다. 또 이 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$와 $y=q$이다.

나) 자연수를 차례로 나열한 수열 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열이므로 1부터 n까지의 자연수의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ \cdots\ +n=\frac{n(n+1)}{2}$$

다) 극한 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$이고 $f(x)$, $g(x)$가 다항식일 때에는 주어진 식 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 나눈 후에 극한값을 구할 수 있다.

[문제 1-1] 모든 자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$를 $f_n(x)=\dfrac{x+3n^2+n}{x-2n}\ (x>2n)$이라 하자. 곡선 $y=f_n(x)$ 위의 한 점 A_n은 x축까지의 거리와 y축까지의 거리가 같은 점이다. 그 거리를 d_n이라 할 때, $\sum\limits_{n=1}^{5} d_n$의 값을 구하시오.

[문제 1-2] 두 함수 $f(x)=\dfrac{30}{2x-15}$, $g(x)=x-\dfrac{15}{2}$에 대하여 $h(x)=f(x)+g(x)$라 하자.
수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=h(n)$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{15} a_n$의 값을 구하시오.

[문제 1-3] 함수 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-1}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}\left(a, \dfrac{3a-1}{a-1}\right)\ (a>1)$을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A', 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 B'이라 할 때, 두 삼각형 APA', $\mathrm{BB'Q}$의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{S_2}{S_1}$의 값을 구하시오.

[문제 1-4] 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$에 대하여 점 $\mathrm{P}(1,2)$를 지나는 두 직선 l, m이 곡선 $y=f(x)$와 각각 두 점에서 만난다. 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 두 교점은 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, B이다. 직선 m과 곡선 $y=f(x)$의 두 교점 중 x좌표가 1보다 큰 점을 C, 직선 m과 x축의 교점을 D라 하자. 두 삼각형 BPC, APD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $2S_1=S_2$를 만족시키는 직선 m의 방정식을 구하시오.

3. 출제 의도

자연 및 사회 현상에서는 어떤 값이 변함에 따라 다른 값이 변하는 경우를 흔히 볼 수 있는데, 함수는 이러한 관계를 탐구하는 중요한 수학적 도구이다. 여러 가지 변화 현상을 포함한 다양한 대응 관계를 표현하는 함수는 대수적 조작이 가능하며, 함수의 그래프를 통해 시각적으로 표현된다. 함수는 여러 가지 현상에서 대상 간의 연관성이나 종속성을 해석하고 예측하는 수단이 되고, 다양한 변화 현상에서의 수학적 관계를 이해하고 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는 능력과 미래를 예측할 수 있는 능력을 기르는 데 도움을 준다. 본 문제는 유리함수의 개념을 바탕으로 주어진 문제를 이해하고 해결할 수 있는지 평가하고자 한다.

1-1. 조건을 만족하는 두 점 사이의 거리를 수열로 표현하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
1-2. 함수의 변화에서 규칙성을 찾고, 규칙적으로 나열된 수를 일반화하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
1-3. 직선의 방정식과 함수의 극한에 대한 개념을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
1-4. 유리함수에서 점근선의 성질을 이해하여 조건에 맞는 직선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	[수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수 [10수학04-04] 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문제 1-1	[수학] - (4) 함수 - ① 함수 [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수 [10수학04-04] 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. [수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학I] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학I03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

문제 1-2	**[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. **[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열** [12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다. [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ② 수열의 합** [12수학Ⅰ03-04] $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-3	**[수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수** [10수학04-04] 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. **[수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한** [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
문제 1-4	**[수학] - (4) 함수 - ② 유리함수와 무리함수** [10수학04-04] 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다. **[수학] - (2) 기하 - ① 평면좌표** [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. **[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학] - (2) 기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외 6인	㈜좋은책신사고	2018	105-107 119-121 225-230
	수학	홍성복 외 10인	㈜지학사	2018	111-114 127-130 237-242
	수학	박교식 외 19인	동아출판사(주)	2018	101-103 113-116 231-236

	수학	이준열 외 9인	㈜천재교육	2018	109-111 123-126 242-246
	수학I	홍성복 외 10인	㈜지학사	2018	95-103 115-124 137-140
	수학I	권오남 외 14인	㈜교학사	2018	97-104 116-125 138-145
	수학I	김원경 외 14인	㈜비상교육	2018	95-104 117-126 139-144
	수학I	배종숙 외 6인	㈜금성출판사	2018	121-133 143-151
	수학II	류희찬 외 10인	㈜천재교과서	2018	12-28
	수학II	배종숙 외 6인	㈜금성출판사	2018	12-31
	수학II	고성은 외 6인	㈜좋은책신사고	2018	11-25
	수학II	홍성복 외 10인	㈜지학사	2018	10-20
기타					

5. 문항 해설

[문제 1-1] 조건을 만족하는 두 점 사이의 거리를 수열로 표현하여 주어진 문제를 해결하는 능력을 평가하는 문제이다.

[문제 1-2] 규칙적으로 나열된 수를 일반화하여 문제를 해결하는 능력을 평가하는 문제이다.

[문제 1-3] 직선의 방정식과 함수의 극한에 대한 개념을 이용하여 함수의 극한값을 구하는 능력을 평가하는 문제이다.

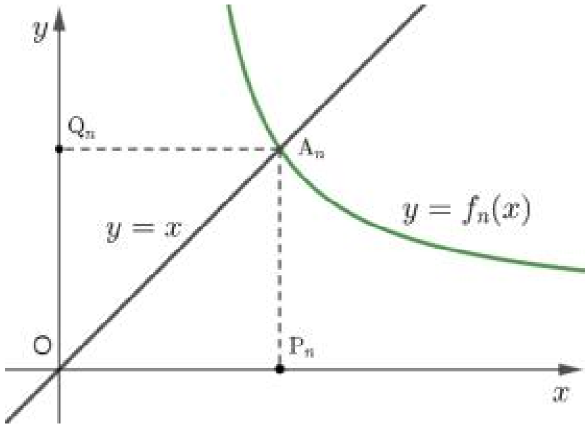
[문제 1-4] 기하와 대수의 연결성을 찾고, 도형을 새로운 관점에서 다루는 직관적인 사고와 계산 능력을 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
1-1	함수의 개념을 이해하고 조건을 만족하는 함수를 표현할 수 있다.	4
	조건을 만족시키는 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	4
	등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.	4
1-2	함수의 변화에서 규칙성 찾고, 그 변화를 수열로 표현할 수 있다.	8
	Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 활용하여 주어진 문제를 풀 수 있다.	4
1-3	주어진 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 표현할 수 있다.	3
	좌표를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있다.	6
	함수의 극한 개념을 이해하고 극한값을 구할 수 있다.	4
1-4	유리함수에서 점근선의 성질을 이해할 수 있다.	4
	삼각형 닮음을 이용할 수 있다.	5
	조건을 만족시키는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	4

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제 1-1] (12점)



점 A_n에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리가 같으므로, A_n은 $f(x)=\dfrac{x+3n^2+n}{x-2n}$ 의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이다. **(4점)**

$\dfrac{x+3n^2+n}{x-2n}=x$, $x^2-(2n+1)x-n(3n+1)=0$, $(x+n)(x-(3n+1))=0$

$x>2n$이므로 $x=3n+1$

따라서 점 A_n의 좌표는 $(3n+1, 3n+1)$이고, $d_n=3n+1$ **(4점)**

$\sum_{n=1}^{5}d_n=\sum_{n=1}^{5}(3n+1)=\dfrac{3\times5\times6}{2}+5=45+5=50$ **(4점)**

[문제 1-2] (12점)

$a_1 = h(1) = -\frac{30}{13} - \frac{13}{2}$, $a_2 = h(2) = -\frac{30}{11} - \frac{11}{2}$, $a_3 = h(3) = -\frac{30}{9} - \frac{9}{2}$, $\cdots$, $a_7 = h(7) = -\frac{30}{1} - \frac{1}{2}$,

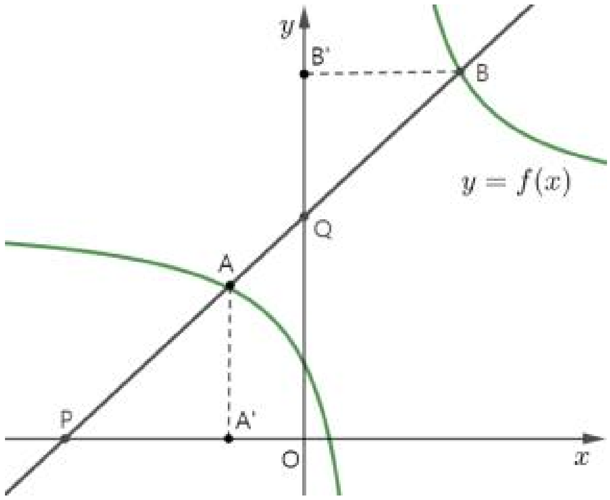
$a_8 = h(8) = \frac{30}{1} + \frac{1}{2}$, $\cdots$, $a_{12} = h(12) = \frac{30}{9} + \frac{9}{2}$, $a_{13} = h(2) = \frac{30}{11} + \frac{11}{2}$, $a_{14} = h(14) = \frac{30}{13} + \frac{13}{2}$,

$a_{15} = h(15) = 2 + \frac{15}{2} = \frac{19}{2}$

이때, $a_1 + a_{14} = 0$, $a_2 + a_{13} = 0$, $a_3 + a_{12} = 0$, $\cdots$, $a_7 + a_8 = 0$이므로 $\sum_{n=1}^{14} a_n = 0$를 만족한다. **(8점)**

$\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{14} a_n + a_{15} = 0 + \frac{19}{2} = \frac{19}{2}$ **(4점)**

[문제 1-3] (13점)



두 점 $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}\left(a, \dfrac{3a-1}{a-1}\right)(a>1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{\dfrac{3a-1}{a-1}-2}{a+1}=\dfrac{1}{a-1}$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{a-1}(x+1)+2$이다. **(3점)**

이때 이 직선의 x절편, y절편은 각각 $-2a+1$, $\dfrac{2a-1}{a-1}$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(-2a+1, 0)$, $\mathrm{Q}\left(0, \dfrac{2a-1}{a-1}\right)$이다. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발 A'의 좌표는 $(-1,0)$이다.

한편, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발 B'의 좌표는 $\left(0, \dfrac{3a-1}{a-1}\right)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AA}'}=2-0=2$, $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}=-1-(-2a+1)=2a-2$, $\overline{\mathrm{BB}'}=a-0=a$,

$\overline{\mathrm{B}'\mathrm{Q}}=\left(\dfrac{3a-1}{a-1}\right)-\left(\dfrac{2a-1}{a-1}\right)=\dfrac{3a-1-2a+1}{a-1}=\dfrac{a}{a-1}$ 이므로

$S_1=$ (삼각형 APA'의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AA}'}\times\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times(2a-2)=2a-2$ **(3점)**

$S_2=$ (삼각형 $\mathrm{BB}'\mathrm{Q}$의 넓이)

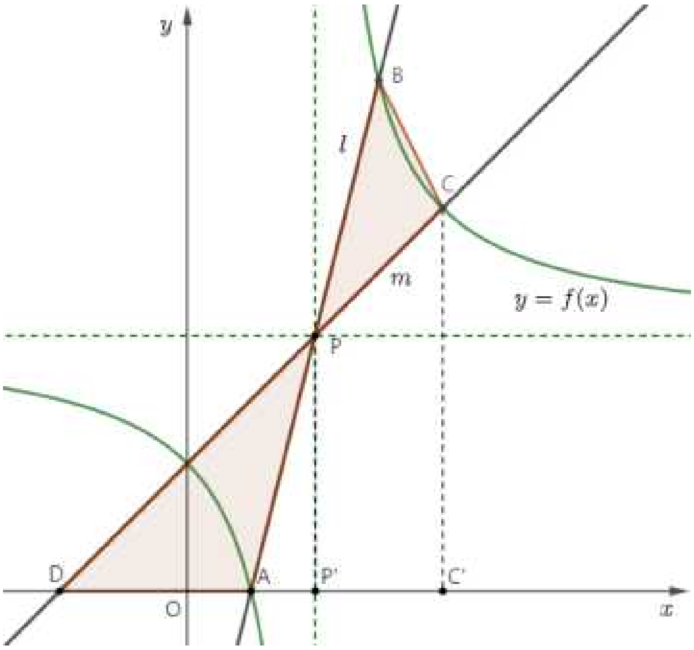
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BB}'}\times\overline{\mathrm{B}'\mathrm{Q}}$

$=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{a}{a-1}=\dfrac{a^2}{2a-2}$ **(3점)**

제시문 다)를 이용하면

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\lim_{a\to\infty}\frac{\dfrac{a^2}{2a-2}}{2a-2}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{4(a-1)^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{4a^2-8a+4}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{4-\dfrac{8}{a}+\dfrac{4}{a^2}}=\frac{1}{4}$$ **(4점)**

[문제 1-4] (13점)



점 $\mathrm{P}(1, 2)$는 곡선 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$의 두 점근선의 교점이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$이다.

$\angle \mathrm{BPC} = \alpha$, $\angle \mathrm{APD} = \beta$라고 할 때, $\angle \mathrm{BPC}$와 $\angle \mathrm{APD}$는 맞꼭지각이므로 $\alpha = \beta$이다. **(4점)**

$S_1 = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BP}} \times \overline{\mathrm{CP}} \times \sin\alpha$ 이고, $S_2 = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{DP}} \times \sin\alpha$ 이다.

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$이므로, $S_1 : S_2 = \overline{\mathrm{CP}} : \overline{\mathrm{DP}}$이다. 따라서 $2S_1 = S_2$이려면 $2\overline{\mathrm{CP}} = \overline{\mathrm{DP}}$이어야 한다. **(5점)**

점 P와 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P', C'라 할 때,
두 삼각형 $\mathrm{DP'P}$, $\mathrm{DC'C}$는 닮음이고 $\overline{\mathrm{DP}} : \overline{\mathrm{DC}} = 2 : 3$이므로 $\overline{\mathrm{PP'}} : \overline{\mathrm{CC'}} = 2 : 3$이다.
점 P의 y좌표는 2이므로, 점 C의 y좌표는 3이다.
$3 = \dfrac{2x-1}{x-1}$을 풀면, $x = 2$이므로 C의 좌표는 $(2, 3)$이다.
따라서 두 점 $\mathrm{P}(1, 2)$와 $\mathrm{C}(2, 3)$을 지나는 직선 m의 방정식은 $y = x + 1$이다. **(4점)**

[공학계열 2번]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술우수자전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	공학계열(수학) / 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	미분, 함수의 그래프, 정적분, 치환적분
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

【문제 2】(50점)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 대한 풀이 과정과 답을 제시하시오. (답만 기재하면 0점 처리)

가) 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)|dx$ 이다.

나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서
(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

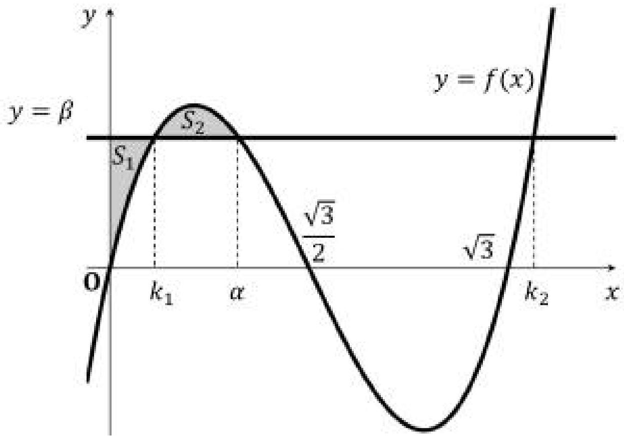
다) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$를 포함하는 구간에서 연속일 때 다음의 등식이 성립한다.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

라) 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때, α, β를 포함하는 구간에서 연속이면 다음의 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[문제 2-1] 그림과 같이 함수 $f(x)=x\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-\sqrt{3})$의 그래프와 직선 $y=\beta$ $(\beta>0)$가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 교점의 x좌표를 각각 k_1, α, k_2 $(k_1<\alpha<k_2)$라 하자.



직선 $y=\beta$와 y축 및 곡선 $y=f(x)$ $(0\le x\le k_1)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1,
직선 $y=\beta$와 곡선 $y=f(x)$ $(k_1\le x\le \alpha)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
이때 $S_1=S_2$를 만족시키는 α, β의 값을 각각 구하시오.

[문제 2-2] 구간 $(0,1]$에서 정의된 함수 $f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\ln(xt)\,dt$의 최솟값을 구하시오.

[문제 2-3] 서로 다른 세 실수 a, b, c $(a<b<c)$에 대하여 함수 $f(x)$를
$f(x)=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x-abc$라 하자.
방정식 $f(x)=0$의 세 실근이 a, b, c일 때,
제시문 나)를 이용하여 $a>0$, $c<3$임을 각각 보이시오.

[문제 2-4] 제시문 다)와 제시문 라)를 이용하여
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^{2022})dx$ 임을 보이시오.

3. 출제 의도

함수의 미분으로부터 얻어지는 방정식의 해를 사용하여 극값의 의미를 이해하고 이를 활용하여 함수의 형태를 이해하는 것을 평가한다. 또한, 극값의 위치에 따라서 근의 개수를 예상할 수 있다는 사실로부터 함수에 대한 이해의 기초를 평가한다.
정적분의 계산을 통해서 함수의 그래프와 넓이의 관계를 이해하여 곡선으로 둘러싸인 넓이에 대한 기본 연산 능력을 평가한다.
정적분에서 치환 적분을 이용하여 적분의 형태를 간단히 하여 계산을 위한 형태를 쉽게 만들 수 있는 능력을 평가한다.

[2-1] 정적분과 면적의 관계를 이해하고, 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 알아낼 수 있는지 평가한다.

[2-2] 로그함수의 성질을 알고, 적분을 계산할 수 있는지 평가한다. 또한, 도함수를 활용하여 그래프의 개형을 알아낼 수 있는지 평가한다.

[2-3] 연속 함수의 사잇값 정리를 이해하고, 이를 활용하여 근의 범위를 계산하는 능력을 평가 한다.

[2-4] 치환 적분을 적용할 수 있는 능력과 계산의 정리 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취 기준**
제시문	**[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용** [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. **[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분** [12수학Ⅱ03-01] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제2-1	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제2-2	**[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. **[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법** [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제2-3	**[수학] - (1) 문자와 식 - ③ 인수분해** [10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다. **[수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속** [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학] - (4) 함수 - ① 함수** [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. **[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
문제2-4	**[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속** [12수학Ⅱ01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ② 정적분** [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법** [12미적03-01] 치환적분을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외	금성출판사	2020	36-40, 62-65, 221-225
		홍성복 외	지학사	2020	34-40, 60-63, 219-224
		고성은 외	좋은책 신사고	2020	28-31, 51-55, 209-213
		박교식 외	동아출판	2020	25-29, 52-54, 211-216
		김원경 외	비상	2020	30-32, 52-54, 203-208
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2020	60-66, 122-130, 131-139
		홍성복 외	지학사	2020	62-69, 124-135, 141-147
		고성은 외	좋은책 신사고	2020	80-90, 119-126, 133-138
		배종숙 외	금성출판사	2020	64-69, 124-127, 131-134
		김원경 외	비상	2020	59-64, 112-118, 125-131
	미적분	홍성복 외	지학사	2020	61-66,114-121,144-147 150-155,164-166
		김원경 외	비상	2020	58-62, 99-103, 126-130 134-137, 147-149
		류희찬 외	천재교과서	2020	68-74, 128-134, 164-171 183-188
		박교식 외	동아출판	2020	61-66, 104-108, 127-133, 134-139, 156-158
		고성은 외	좋은책 신사고	2020	58-64, 102-108, 127-131, 132-136, 155-156
기타					

5. 문항 해설

본 문제는 함수의 미분을 이용하여 그래프의 개형을 알고, 이를 방정식 또는 부등식의 해법에 이용할 수 있는지를 평가한다. 함수의 적분을 이용하여 주어진 영역의 넓이를 계산할 수 있는지를 평가한다.

[문제2-1]

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 통해 정적분과 넓이의 연관성을 이해하는지 평가하는 문제이다.

(2) $y=f(x)$의 정의와 곡선상의 점의 이해를 확인하는 문제이다.

(3) 함수의 정적분과 이를 통해 발생하는 방정식을 정확하게 해석하는 문제이다.

(4) 실수들의 크기를 비교하여 주어진 조건에 만족하는 값을 찾을 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제2-2]

(1) 로그 함수의 성질을 이해하는지 평가하는 문제이다.

(2) 로그를 포함한 함수를 미분할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(3) 도함수를 이용하여 함수 그래프 $y=f(x)$의 개형을 나타낼 수 있는지 평가하는 문제이다.

(4) 극대, 극소, 최대, 최소의 개념을 알고 있는지 평가하는 문제이다.

(5) 자연로그와 e사이의 관계를 통해 계산할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제2-3]

(1) 도함수를 통해서 극값의 위치를 찾을 수 있는지 확인하는 문제이다.

(2) 도함수를 이용하여 함수의 개형을 알아낼 수 있는지 평가하는 문제이다.

(3) 미분 가능한 $y=f(x)$ 함수와 함수의 그래프에서 근과 주어진 값들의 크기를 비교할 수 있는지 평가하는 문제이다.

[문제2-4]

(1) 함수의 성질을 이용하여 정적분을 변경할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(2) 치환을 통해 정적분을 변환할 수 있는지 평가하는 문제이다.

(3) 정적분의 구간이 같은 경우 피적분 함수를 간단히 할 수 있는지 평가하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위문항	채점기준	배점
2-1	적분 $\int_0^{\alpha}(f(x)-\beta)dx=0$를 활용하여 넓이와 적분의 개념을 적용한다.	5
	적분을 하여 방정식 $\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^3+\frac{3}{4}\alpha^2-\alpha\beta=0$을 만들 수 있다.	3
	$\beta=\alpha^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha$를 이용하여 방정식을 다음과 같이 인수분해 할 수 있다. $\begin{aligned}\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^3+\frac{3}{4}\alpha^2-\alpha\left(\alpha^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha\right)&=\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^3+\frac{3}{4}\alpha^2-\alpha^4+\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2\\&=-\frac{3}{4}\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\alpha+1\right)\\&=-\frac{3}{4}\alpha^2\left(\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\alpha-\sqrt{3})\\&=0\end{aligned}$	4
	세 근의 크기를 고려하여 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{9}$를 구할 수 있다.	3
2-2	로그 함수를 적분하고, 적분 결과로 나온 함수를 미분할 수 있다.	4
	극솟값을 구하기 위해서 그래프의 개형을 사용할 수 있다. $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$에서 $f'(x)=0$이다. $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} x & (0) & \cdots & \frac{1}{2\sqrt{e}} & \cdots & 1 \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & + \\ \hline f(x) & & \searrow & \text{극소} & \nearrow & f(1) \end{array}$	4
	값을 대입하여 최솟값을 계산할 수 있다.	2
2-3	미분과 간단한 인수분해를 통해서 극대, 극소의 위치를 찾을 수 있다.	2
	그래프의 개형을 구하고, 사잇값 정리를 적용하여 서로 다른 세 실수의 존재를 찾을 수 있다.	3
	부등식의 결과 $abc<\frac{5}{2}$와 $abc>2$를 구할 수 있다.	2
	사잇값의 정리에 의해 실근의 존재 범위 0과 1사이를 구할 수 있다.	3
	사잇값의 정리에 의해 실근의 존재 범위 2와 3사이를 구할 수 있다.	3
	세 실근의 대소관계를 이용하여 요구하는 부등식을 정리할 수 있다.	2
2-4	제시문과 문제의 조건을 사용하여 정적분의 구간을 나눌 수 있다.	3
	제시문과 치환을 통해서 정적분을 변형할 수 있다.	4
	정적분의 계산을 하지 않고 간단한 연산을 통해서 피적분 함수를 정리할 수 있다.	3

7. 예시 답안 혹은 정답

[문제2-1]

$f(x)=x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-\sqrt{3})$이므로 방정식 $f(x)=0$의 세 근은 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$이다. 두 부분의 넓이가 같기 위해서는 $\int_0^{\alpha}(f(x)-\beta)dx=0$이어야 한다. **(5점)**

이를 계산하면, $\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^3+\frac{3}{4}\alpha^2-\alpha\beta=0$이다. **(3점)**

$\beta=\alpha^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha$이므로,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^3+\frac{3}{4}\alpha^2-\alpha\left(\alpha^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^2+\frac{3}{2}\alpha\right)&=\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^3+\frac{3}{4}\alpha^2-\alpha^4+\frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2\\&=-\frac{3}{4}\alpha^2\left(\alpha^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\alpha+1\right)\\&=-\frac{3}{4}\alpha^2\left(\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(\alpha-\sqrt{3})\\&=0\end{aligned}$$

(4점)

$\alpha=0,\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}$ 중에서 세 근의 위치를 고려하면 $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{9}$ **(3점)**

[문제2-2]

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_x^{2x}\{\ln(x)+\ln(t)\}dt\\&=\ln x[t]_x^{2x}+[t\ln t-t]_x^{2x}\\&=x\ln x+2x\ln(2x)-2x-(x\ln x-x)\\&=2x\ln(2x)-x\end{aligned}$$

이를 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\ln(2x)+2x\times\frac{2}{2x}-1\\&=2\ln(2x)+1\end{aligned}$$

(4점)

$x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$에서 $f'(x)=0$이다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	$f(1)$

(4점)

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2\sqrt{e}}$일 때 극소이면서 최소이다.

최솟값은 $f\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{1}{2\sqrt{e}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}$ **(2점)**

[문제2-3]

$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$이므로 $x=1$, $x=2$일 때, $f'(x)=0$이다.

(2점)

$f(x)$의 증감상태를 조사하면 다음 표와 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 존재하려면 $f(1)>0$, $f(2)<0$이어야 한다. 사잇값 정리에 의해 1과 2사이에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다. ……① **(3점)**

$f(1)>0$이므로 $f(1)=\frac{5}{2}-abc>0$이고 $abc<\frac{5}{2}$

$f(2)<0$이므로 $f(2)=2-abc<0$이고 $abc>2$

(2점)

따라서 $f(0)=-abc<-2<0$이고 $f(1)>0$이므로 사잇값 정리에 의해 0과 1사이에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다. ……② **(3점)**

또한 $f(3)=\frac{9}{2}-abc>2>0$이고 $f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의해 2와 3 사이에 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재한다. ……③ **(3점)**

방정식 $f(x)=0$의 세 실근 a, b, c는 $a<b<c$이므로 ①, ②, ③에 의해 $0<a$, $c<3$이다. **(2점)**

[문제2-4]

제시문 다)를 이용하면

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx$$ **(3점)**

제시문 라)를 이용하여 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx$를 $x=-t$로 치환하여 계산하면

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t^{2022})}{1+2022^{-t}}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2022^t\sin(t^{2022})}{2022^t+1}dt$$ **(4점)**

이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2022^t \sin(t^{2022})}{2022^t+1} dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2022^x \sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+2022^x)\sin(x^{2022})}{1+2022^x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^{2022}) dx$$ **(3점)**