5 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하, 미적분, 수학
	핵심개념 및 용어	이차곡선, 접선의 방정식, 절대부등식
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

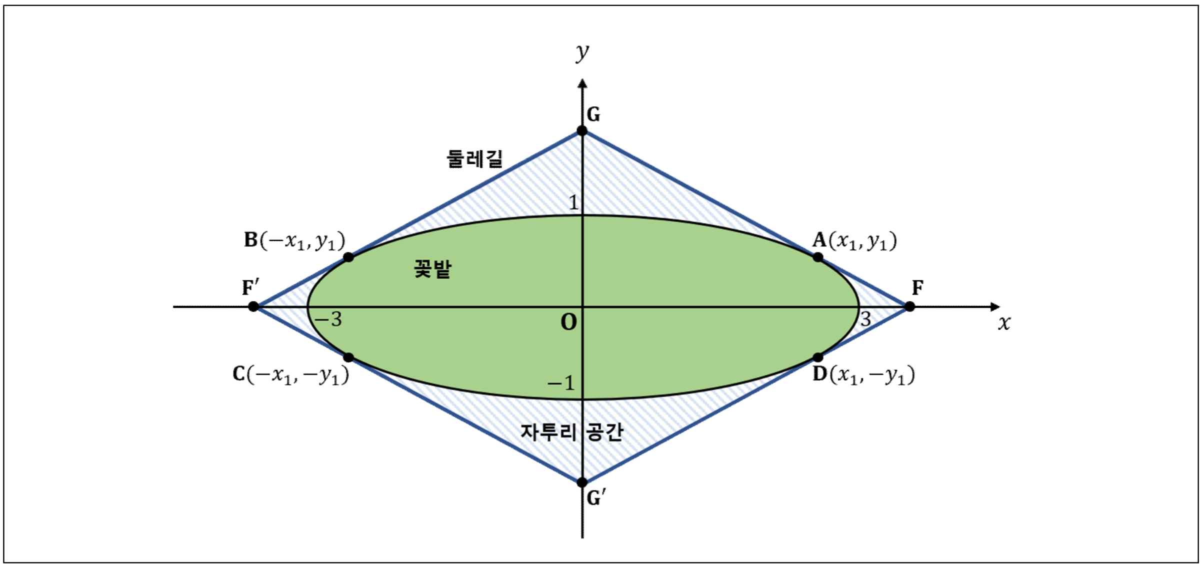
문제 1 (20점)

중심이 원점 O이고, 장축 길이가 6 m, 단축의 길이가 2 m인 타원 모양의 경계를 갖는 꽃밭이 있다. 아래 그림과 같이 타원 위의 네 개의 점 $A(x_1,y_1)$, $B(-x_1,y_1)$, $C(-x_1,-y_1)$, $D(x_1,-y_1)$를 선택하여 이에 외접하는 사각형 모양의 둘레길을 만들려고 한다. 사각형 내부에서 타원 내부를 제외한 나머지 부분을 자투리 공간(아래 그림의 빗금 친 부분)이라 한다. 자투리 공간의 넓이가 최소가 되도록 둘레길을 만들려고 한다.

(가) $x_1>0, y_1>0$ 이며, 둘레길의 폭은 무시한다. 사각형의 네 꼭짓점은 F, F', G, G'이다.

(나) 꽃밭의 경계를 나타내는 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 이다. 꽃밭의 넓이는 3π m^2이며, 꽃밭의 경계의 폭은 무시한다.

(다) 임의의 실수 $r>0, s>0$에 대하여, $\sqrt{rs}\le\dfrac{r+s}{2}$이며 등호는 $r=s$일 때 성립한다.



(1) 방정식 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구하시오.

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$에서의 타원의 접선의 방정식을 $y=cx+d$이라고 하자. 문항 (1)의 결과를 이용하여, c를 x_1과 y_1에 대한 식으로 나타내고, d를 y_1에 대한 식으로 나타내시오. 또한, 이 접선의 x절편을 x_1에 대한 식으로 나타내시오.

(3) 자투리 공간의 넓이가 최솟값을 가질 때 x_1과 y_1을 구하고, 이때 자투리 공간의 넓이를 구하시오.

(4) 문항 (3)과 같이 자투리 공간의 넓이가 최솟값을 가지도록 둘레길을 설치하였다. 이후 점 F와 F′을 초점으로 가지고 점 G와 G′을 지나는 타원 모양의 울타리를 설치하려고 한다. 이 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구하시오. (단, 울타리의 폭은 무시한다.)

3. 출제 의도

고등학교 『기하』 교과서에서 다루는 이차곡선 중 하나인 타원의 정의를 숙지하고, 타원과 직선의 위치 관계에 대해 이해한다. 고등학교 『미적분』 교과서에서 다루는 음함수의 미분을 통해 미분값을 구할 수 있고, 접선의 방정식에 활용할 수 있다. 고등학교 『수학』 교과서에서 다루는 절대부등식을 활용하여 최대/최솟값을 찾을 수 있다. 이를 통해, 고등학교 과정에서 학습한 내용을 실생활 문제에 적용하여 최적의 해를 구하는 데 활용할 수 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 <공통과목> -과목명: 수학 <일반선택> -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 <진로선택> -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. (51쪽) **[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다. (109쪽)
문항 (1)	**[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다. (87쪽)
문항 (2)	**[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. (87쪽)
문항 (3)	**[수학] - (3) 수와 연산 - ② 명제** [10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. (51쪽)
문항 (4)	**[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선** [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. (109쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	기하	권오남 외	교학사	2019	12~57
	기하	홍성복 외	지학사	2019	10~55
	기하	고성은 외	좋은책신사고	2019	11~55
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	82~133
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	82~135
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	50~135
	수학	고성은 외	좋은책신사고	2018	183~205
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	166~210
	수학	홍성복 외	지학사	2018	192~215

5. 문항 해설

(1) 이차곡선 중 하나인 타원의 함수를 음함수의 미분법을 사용해 미분하는 문제이다.

(2) 타원의 함수와 접점이 주어졌을 때 이에 접하는 접선의 방정식과 x절편을 구하는 문제이다.

(3) 문항 (2)에서 구한 접선의 x절편, y절편을 활용하여 둘레길을 나타내는 마름모 형태의 사각형 넓이를 구하고, 이를 통해 제시된 자투리 공간의 넓이를 계산할 수 있다. 제시문 (다)에 주어진 부등식을 타원의 방정식에 적용하여 자투리 공간의 넓이의 최솟값을 구할 수 있으며, 등호가 성립할 조건을 이용하여 접점의 좌표 x_1, y_1을 찾아낼 수 있다.

(4) 피타고라스의 정리와 (3)의 해답을 활용해 설치할 울타리의 장축의 길이를 구할 수 있다. 또한 문항 (2)에서 찾은 접선의 y절편을 이용해 울타리의 단축의 길이를 찾을 수 있다. 해당 장축과 단축의 길이를 이용해 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	음함수의 미분법을 활용할 수 있음 (2점) 미분값 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{9y}$를 정확히 계산하여 나타낼 수 있음 (2점)	4
(2)	c를 x_1과 y_1을 활용한 간소화된 식으로 표현할 수 있음 ($c=-\frac{x_1}{9y_1}$) (1점) d를 y_1을 활용한 간소화된 식으로 표현할 수 있음 ($d=\frac{1}{y_1}$) (2점) 접선의 x절편을 x_1을 이용한 간소화된 식으로 표현할 수 있음 (x절편 : $\frac{9}{x_1}$) (1점)	4
(3)	(2)에서 구한 접선의 방정식을 활용해 자투리 공간의 넓이를 x_1과 y_1에 대한 간소화된 식으로 정확히 표현할 수 있음 (넓이 : $\frac{18}{x_1y_1}-3\pi$) (2점) 제시문 (다)의 부등식을 활용하여 자투리 공간의 넓이의 최솟값을 구할 수 있음 ($12-3\pi$) (3점) 자투리 공간의 넓이가 최솟값을 가질 때 x_1, y_1의 값을 정확히 구할 수 있음 $(x_1, y_1)=(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ (3점)	8
(4)	$(x_1, y_1)=(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$의 값을 가질 때, 울타리의 장축, 단축 길이를 정확히 계산할 수 있음 (장축 $4\sqrt{5}$, 단축 $2\sqrt{2}$) (2점) 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 정확히 구할 수 있음 (2점)	4

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 음함수의 미분법을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{9}\right)+\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{9y} \qquad (\text{단}, y\neq 0)$$

(2) (x_1, y_1)위에서의 기울기는 $c=-\dfrac{x_1}{9y_1}$이 된다. 이를 접선의 방정식 $y=c(x-x_1)+y_1$에 대입하면,

$$y=-\frac{x_1}{9y_1}(x-x_1)+y_1=-\frac{x_1}{9y_1}x+\left(\frac{x_1^2}{9y_1}+y_1\right) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

한편, (x_1, y_1)은 타원 위에 있는 점이므로, $\dfrac{x_1^2}{9}+y_1^2=1$을 만족한다. 이를 이용하면

$$\frac{x_1^2}{9y_1}+y_1=\frac{1}{y_1}$$

을 얻을 수 있다. 이를 위 접선의 방정식 ①에 대입하면,

$$y=-\frac{x_1}{9y_1}x+\frac{1}{y_1}$$

이 되어, $c=-\dfrac{x_1}{9y_1}, d=\dfrac{1}{y_1}$이다. 이를 이용하면 접선의 x절편은 $\dfrac{9}{x_1}$가 된다.

(3) 해당 둘레길이 x축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{F}(a,0)$과 $\mathrm{F}'(-a,0)$라 하고, y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{G}(0,b)$과 $\mathrm{G}'(0,-b)$라 하자 (단, $a>0, b>0$이다.). a와 b는 각각 (2)에서 구한 접선의 x절편과 y절편이므로 $a=\dfrac{9}{x_1}, b=\dfrac{1}{y_1}$임을 알 수 있다. 둘레길은 마름모 모양이며 내부의 넓이는 $2ab=\dfrac{18}{x_1y_1}$이다. 꽃밭의 넓이는 3π이므로, 자투리 공간의 넓이는

$$\frac{18}{x_1y_1}-3\pi$$

가 된다.

한편, (x_1, y_1)은 제시된 타원 방정식 위의 점이므로 다음을 만족한다.

$$1=\frac{x_1^2}{9}+y_1^2$$

제시문 (다)를 이용하여 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$1=\frac{x_1^2}{9}+y_1^2 \geq 2\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{9}\right)y_1^2}=\frac{2x_1y_1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1y_1} \geq \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\Rightarrow \frac{18}{x_1y_1}-3\pi \geq 12-3\pi$$

등호는 $\frac{x_1^2}{9}=y_1^2=\frac{1}{2}$일 때 성립한다. 즉, 자투리 공간의 총 넓이의 최솟값은 $12-3\pi$이고, 이때 $(x_1, y_1)=(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 이다.

(4) 문항 (3)으로부터, 둘레길을 나타내는 마름모의 네 꼭짓점 좌표는 각각 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{x_1}, 0\right), \mathrm{F}'\left(-\frac{9}{x_1}, 0\right), \mathrm{G}\left(0, \frac{1}{y_1}\right), \mathrm{G}'\left(0, -\frac{1}{y_1}\right)$이다. 피타고라스 정리를 활용하여 마름모의 한 변의 길이를 구하면 $\sqrt{\left(\frac{9}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$가 되므로, 울타리의 장축의 길이는 $2\sqrt{\left(\frac{9}{x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$이다. 여기에 문항 (3)에서 구한 $(x_1, y_1)=(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$를 대입하면, 울타리의 장축의 길이는 $4\sqrt{5}$가 된다. 한편, 단축의 길이는 $\frac{2}{y_1}=2\sqrt{2}$이다. 이를 활용하여 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구하면,

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{2}=1$$

이 된다,

6 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률, 확률변수, 기댓값, 정규분포
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

홍익이는 아빠, 엄마와 함께 다음의 방식으로 주사위 놀이를 한다. 주사위는 정육면체이며, 주사위를 던졌을 때 각 면이 나올 확률은 모두 같다. 세 사람은 각자의 주사위를 가지고 있으며, 주사위의 각 면에는 서로 다른 자연수가 쓰여 있다. 주사위 놀이에서는 두 사람이 자신의 주사위를 동시에 한 번 던져 더 큰 수가 나온 사람이 승리한다. 홍익이, 아빠, 엄마의 주사위에 있는 총 18개의 면에는 모두 다른 자연수가 쓰여 있어 이 놀이에서 무승부는 나오지 않는다. 홍익이와 아빠의 주사위에 쓰인 숫자는 각각 다음과 같다.

홍익이의 주사위: $2, 4, 23, 25, 29, 31$
아빠의 주사위: $5, 7, 11, 13, 35, 37$

(1) 홍익이의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 확률변수 X, 아빠의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 확률변수 Y라 하자. X와 Y의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(Y)$를 구하시오.

(2) 홍익이와 아빠가 주사위 놀이를 한다면 둘 중 누가 더 유리한지 설명하시오.

(3) 홍익이와 아빠는 매일 한 번씩 총 405일간 주사위 놀이를 하였다. 홍익이가 승리한 날이 총 200일 이상이 될 확률을 아래의 표준정규분포표를 사용하여 구하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

(4) 엄마의 주사위는 각 면의 자연수를 엄마가 임의로 선택하여 만들 수 있다. 단, 제시문의 설명과 같이, 홍익이, 아빠, 엄마의 주사위에 있는 총 18개의 면에는 모두 다른 자연수가 쓰여야 한다. 엄마는 이 주사위를 홍익이와 주사위 놀이를 할 때 사용하고, 같은 주사위를 아빠와 주사위 놀이를 할 때도 사용한다. 엄마가 홍익이와 주사위 놀이를 하여 엄마가 승리할 확률을 p_1이라 하고, 엄마가 아빠와 주사위 놀이를 하여 엄마가 승리할 확률을 p_2라 하자. 엄마가 $p_1 - p_2$가 최대가 되도록 주사위 각 면의 자연수를 선택한다고 할 때, $p_1 - p_2$의 최댓값은 무엇인지 설명하시오.

3. 출제 의도

고등학교 『확률과 통계』 교과서에서 다루는 경우의 수와 확률의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.

(1) 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는지 평가한다.
(2) 경우의 수로부터 확률을 구하고 그 의미를 이해하는지 평가한다.
(3) 이항분포의 평균과 표준편차를 알고, 정규 근사하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.
(4) 확률과 경우의 수를 활용하여 주어진 상황을 분석하고 논리적으로 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 <공통과목> -과목명: 수학 <일반선택> -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 <진로선택> -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. (97쪽)
문항 (1)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. (98쪽)

문항 (2)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. (97쪽)
문항 (3)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-03] 이항분포의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다. [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. (98쪽)
문항 (4)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. (97쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2021	44-52, 85-91, 93-112
	확률과 통계	권오남 외	교학사	2021	44-52, 89-95, 96-108
	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2021	43-49, 87-92, 93-107
	확률과 통계	황선욱 외	미래앤	2021	43-48, 86-91, 92-104
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2020	37-42, 77-82, 83-98

5. 문항 해설

(1) 이산확률변수 X, Y의 기댓값을 구한다.

(2) 홍익이와 아빠가 주사위 놀이를 하였을 때 홍익이가 승리할 확률과 아빠가 승리할 확률을 계산하여 서로 비교한다.

(3) 홍익이가 승리한 날의 수를 확률변수 W라 하면 W가 이항분포를 따르므로 이와 같은 평균과 표준편차를 갖는 정규분포로 근사하여 구하는 확률을 계산한다.

(4) 엄마의 주사위에 쓰인 숫자의 선택에 따라 확률 p_1과 p_2가 어떻게 변하는지 분석하여 $p_1 - p_2$가 최대가 되는 경우를 찾고, 그 과정을 논리적으로 서술한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	기댓값 $\mathrm{E}(X)$를 구함 (1점) 기댓값 $\mathrm{E}(Y)$를 구함 (1점)	2
(2)	홍익이 또는 아빠가 주사위 놀이에서 승리할 확률을 구함 (2점) 두 확률을 비교하여 아빠가 유리함을 판단함 (1점)	3
(3)	홍익이가 승리한 날을 나타내는 확률변수는 이항분포 $\mathrm{B}(405, \frac{4}{9})$를 따름을 서술함 (1점) 이항분포를 정규분포 $\mathrm{N}(180, 10^2)$로 근사하고, 표준정규분포표를 사용하여 확률을 계산함 (2점)	3
(4)	제시문에 주어진 조건이 엄마의 주사위에 쓰인 숫자의 선택에 미치는 영향을 고려하고, 엄마의 선택에 따라 확률 p_1과 p_2에 어떤 영향을 미치는지 분석함 (2점) $p_1 - p_2$의 최댓값을 구함 (4점) 구한 값이 $p_1 - p_2$의 최댓값임을 논리적으로 증명함 (6점)	12

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) $\mathrm{E}(X) = \dfrac{2+4+23+25+29+31}{6} = 19$, $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{5+7+11+13+35+37}{6} = 18$.

(2) 홍익이와 아빠 두 사람이 동시에 주사위를 던졌을 때 홍익이가 승리할 경우의 수를 나타내는 다음의 표에서 홍익이가 승리할 확률은 $\dfrac{4}{9}$ 이며, 아빠가 승리할 확률은 $\dfrac{5}{9}$이므로 아빠가 더 유리하다.

	2	4	23	25	29	31
5	×	×	○	○	○	○
7	×	×	○	○	○	○
11	×	×	○	○	○	○
13	×	×	○	○	○	○
35	×	×	×	×	×	×
37	×	×	×	×	×	×

(3) 홍익이가 승리한 날의 수를 확률변수 W라 하면, W는 이항분포 $\mathrm{B}(405, \frac{4}{9})$를 따르며, 평균 m과 표준편차 σ는 각각 $m = 405 \times \dfrac{4}{9} = 180$, $\sigma = \sqrt{405 \times \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9}} = \sqrt{100} = 10$ 이다. 확률변수 W는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180, 10^2)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(200 \le W) = \mathrm{P}(\frac{200-180}{10} \le Z) = \mathrm{P}(2 \le Z) = \frac{1}{2} - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$ 이다.

(4) A를 홍익이의 주사위에 쓰인 자연수들의 집합이라 하고, B를 아빠의 주사위에 쓰인 자연수들의 집합이라 하자. A 또는 B에 속하지 않은 자연수 n에 대해 $f(n)$을 n보다 작은 A의 원소의 개수라 하고, $g(n)$을 n보다 작은 B의 원소의 개수라 하자. 만약 a_i를 엄마의 주사위에 쓰인 i번째 자연수라 하면, $\sum_{i=1}^{6} f(a_i)$는 엄마와 홍익이의 주사위 놀이로 나오는 36개의 결과 중 엄마가 승리하는 경우의 수이므로 $p_1 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} f(a_i)$이다. 같은 이유로 $p_2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6} g(a_i)$ 이며 $p_1 - p_2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}(f(a_i) - g(a_i))$ 이 성립한다. 다음의 표는 A 또는 B에 속하지 않은 자연수 n에 대해, 그 자연수가 속한 구간에 따른 f, g, $f-g$의 값을 나타낸다.

A		2		4									23		25		29		31					
B					5		7		11		13										35		37	
f	0	×	1	×	×	2	×	2	×	2	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	6	×	6
g	0	×	0	×	×	1	×	2	×	3	×	4	×	4	×	4	×	4	×	4	×	5	×	6
$f-g$	0	×	1	×	×	1	×	0	×	-1	×	-2	×	-1	×	0	×	1	×	2	×	1	×	0

따라서 $p_1 - p_2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}(f(a_i) - g(a_i))$의 값이 최대가 되는 경우는 엄마가 $f-g$의 값이 2인 31과 35 사이의 세 자연수 32, 33, 34를 모두 선택하고, $f-g$의 값이 1인 3, 6, 30, 36 중 임의로 나머지 세 자연수를 선택하는 경우이므로, $p_1 - p_2$의 최댓값은

$p_1 - p_2 = \frac{3 \times 2 + 3 \times 1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ 이다.

7 자연계열 논술고사 (서울) (수학)

[홍익대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	구의 적분, 원뿔의 적분
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

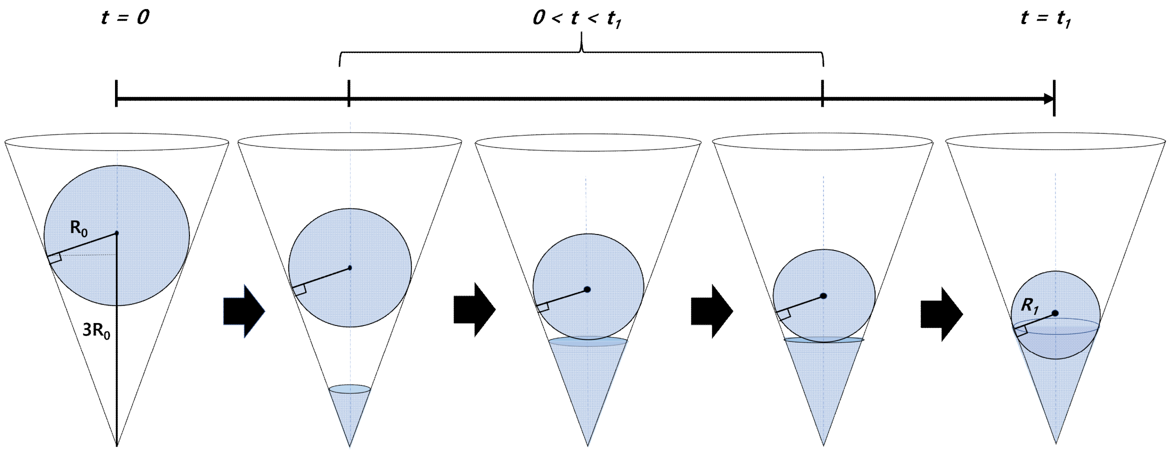
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

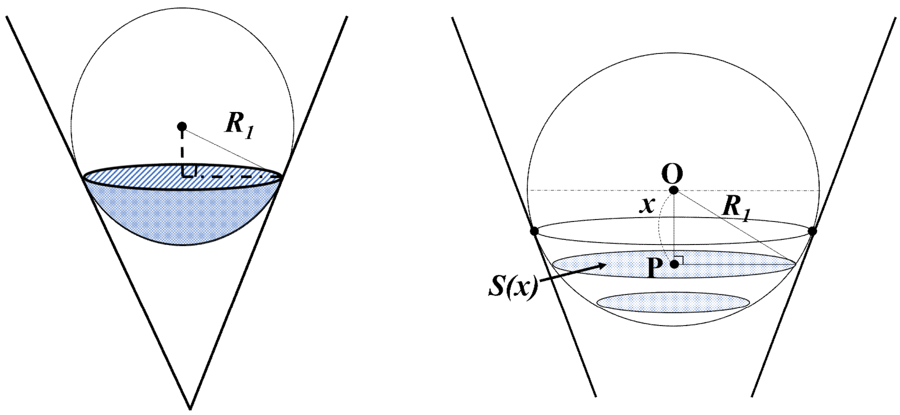
홍익이는 <그림1>과 같이 반지름이 R_0 cm 이고 두께가 없는 구 모양의 특수 풍선을 제작하여 풍선 속에 물을 가득 담았다. 물풍선은 비어있는 원뿔 모양의 그릇(이하 원뿔그릇) 안에 놓이고, 원뿔그릇 옆면에 접한다. 이때 물풍선의 중심과 원뿔그릇 꼭짓점 사이의 거리는 $3R_0$ cm 이다. 물풍선 밑에는 작은 구멍이 있어서 풍선이 수축하며 이 구멍으로 물이 빠져나간다. t초 후 빠져나간 물의 부피는 $V(t)=\frac{\pi}{3}t$ cm^3 이다. 빠져나간 물은 <그림2>와 같이 원뿔그릇의 아래부터 즉시 채워지며, 물이 떨어지는 데 걸리는 시간은 무시한다. 물이 빠져나간 만큼 부피가 줄어드는 물풍선은 항상 구 모양을 유지하며 원뿔그릇 옆면에 접하고, 물풍선의 반지름은 R이라 한다. <그림2(a)>부터 <그림3(b)>까지에 대한 설명은 아래와 같다.

- <그림2(a)> 시각 t $(0<t<t_1)$에, 물풍선 구멍을 통해 빠져나간 물이 원뿔그릇에 고여 원뿔 모양을 이룬다.
  <그림2(b)> 시간이 지남에 따라 빠져나간 물이 이루는 원뿔의 밑면과 물풍선은 서로 접한다. <그림2(c)> 이후 물풍선의 일부가 빠져나간 물에 잠긴다. 물풍선이 빠져나간 물에 잠긴 후에도 물풍선에서 물은 계속 빠져나간다.
- <그림3(a)> 시각 t_1은 빠져나간 물이 원뿔그릇과 이에 접하는 물풍선 사이의 공간을 모두 채우는 순간이다. 이때 물풍선의 반지름은 R_1이다.

<그림3(b)>는 시각 t_1에서 물풍선이 빠져나간 물에 잠긴 부분을 나타낸다. 물풍선의 중심 O 에서 원뿔그릇의 꼭짓점을 지나는 선분 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=x$라 하자. 이때 점 P 를 지나고 원뿔그릇의 밑면에 평행인 평면으로 물풍선을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하자.



<그림1> <그림2(a)> <그림2(b)> <그림2(c)> <그림3(a)>



<그림3(b)>

(1) 시각 t에서 물풍선의 반지름 R을 R_0과 t에 대한 식으로 나타내시오. $(0 \leq t \leq t_1)$

(2) $S(x)$를 R_1과 x의 식으로 표현하시오.

(3) 시각 t_1에서 빠져나간 물에 잠긴 물풍선 부분의 부피를 R_1에 대한 식으로 나타내시오.

(4) $R_0=5$일 때, 시각 t_1를 구하시오.

3. 출제 의도

고등학교『수학』,『수학 I』,『미적분』교과서에서 다루는 개념들을 종합적으로 활용하여 주어진 조건에서 해를 찾는 문제에 적용하고 해결할 수 있는지를 평가한다. 또한, 원의 면적을 구하는 식을 이용하여 구와 원뿔 부피를 구하는 것을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

(1) 시간에 따른 변화량을 이해하고 구의 적분 부피의 변화량과의 관계를 식으로 만들어 낼 수 있는지를 평가한다.

(2) 원뿔과 원의 특징을 이해하여 닮음 삼각형을 적용하여 길이를 유추하고, 그 관계를 이용하여 원의 넓이에 대한 수식을 만들 수 있는지를 평가한다.

(3) 원의 넓이를 구하는 식을 단면의 적분 공식에 적용하여 구하고자 하는 구간의 부피를 구할 수 있는지를 평가한다.

(4) 앞서 구한 부피와 닮은 삼각형을 이용하여 필요한 부피들을 할 수 있는지 평가한다. 또한, 제시문에 주어진 시간에 따른 변화량과 부피의 관계를 통해 시간개념을 이해하고 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 <공통과목> -과목명: 수학 <일반선택> -과목명: 수학 I, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 <진로선택> -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용** [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다. (88쪽)
문항 (1)	**[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. (63쪽)
문항 (2)	**[수학] - (2)기하 - ③ 원의 방정식** [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. (50쪽)
문항 (3)	**[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용** [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다. (88쪽)
문항 (4)	**[수학 I] - (1) 지수함수와 로그함수 - ② 지수함수와 로그함수** [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. (63쪽)

	[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다. (88쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	홍성복 외 10인	지학사	2019	160 - 170
	미적분	김원경 외 14인	비상	2019	143 - 159
	수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	10 - 35
	수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	11 - 59
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	11 - 56
	수학	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	133 - 145
	수학	홍성복 외 10인	지학사	2018	140 - 151
	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	136 - 139

5. 문항 해설

(1) 시간에 따른 물풍선을 빠져나가는 부피의 변화율과 시간의 곱은 물풍선에서 빠져나가는 물의 부피와 같다. 따라서, 임의의 물풍선 반지름 R과 그때의 시각 t, 부피의 변화량, 처음의 물풍선의 반지름 R_0의 관계를 정리하면, 시각 t에서의 물풍선의 반지름 R을 R_0와 시간t에 대해 표현할 수 있다.

(2) 물풍선에서 빠져나간 물에 물풍선 일부가 잠겨서 사이의 공간이 없어지는 순간의 시각을 t_1이한다. 그때 물풍선의 중심O에서 물에 잠긴 물풍선을 자르는 평면에 내린 수선이 만나는 점P와의 거리를 x라 하고, 물풍선의 반지름 R_1을 피타고라스 정리를 이용하여 그림3(b)의 $S(x)$의 반지름을 구할 수 있다.

(3) 직각삼각형의 닮음을 이용하여 x가 $\frac{1}{3}R_1$ 부터 R_1 까지의 변화에 대해 넓이 $S(x)$를 적분할 수 있다.

(4) 시각 t_1에서 물풍선에서 빠져나간 물의 부피와 물풍선의 부피의 변화량은 같아야 한다. 물풍선에서 빠져나간 물의 부피를 구하면 R_1^3에 대해 정리할 수 있다. 그리고, 작아진 물풍선의 부피의 변화량을 구하면 R_0^3과 R_1^3에 대하여 정리할 수 있다. 앞서 구한 두 식을 R_0^3에 대해 정리할 수 있고, 이 부피의 변화량은 시간에 따라 물풍선을 빠져나간 물의 부피와 같으므로 빠져나가는 변화율로 나누어주면 구하고자 하는 시간 t_1을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	물풍선을 빠져나가는 물의 부피를 변화율을 사용하여 수식으로 표현함 (2점)	2
(2)	단면에 만들어지는 원의 반지름이 $\sqrt{(R_1^2-x^2)}$와 같음을 나타냄 (3점) $S(x)=\pi(R_1^2-x^2)$을 나타냄 (1점)	4
(3)	문항(2)에서 사용한 넓이 구하는 공식 $S(x)=\pi(R_1^2-x^2)$을 사용하고, 범위를 정확히 $\frac{1}{3}R_1$에서 부터 R_1라고 표현함 (3점) 다음의 과정으로 정확하게 답을 도출함 (3점) $\int_{\frac{R_1}{3}}^{R_1}\pi(R_1^2-x^2)dx=\pi\left[R_1^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{R_1}{3}}^{R_1}=\pi\left[R_1^3-\frac{R_1^3}{3}-\frac{R_1^3}{3}+\frac{R_1^3}{81}\right]=\frac{28}{81}\pi R_1^3$	6
(4)	물풍선을 빠져나간 물의 부피가 원뿔의 부피에서 물에 잠긴 물풍선의 부피를 제외한 부분을 계산함 (3점) $\varDelta V=\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R_1\right)^2\times\frac{8}{3}R_1\times\frac{1}{3}-\frac{28}{81}\pi R_1^3=\frac{64}{81}\pi R_1^3-\frac{28}{81}\pi R_1^3=\frac{36}{81}\pi R_1^3$ 작아진 물풍선 부피의 변화량을 R_0에 대해서 표현함 (2점) $\varDelta V=\frac{4}{3}\pi R_0^3-\frac{4}{3}\pi R_1^3=\frac{4}{3}\pi R_0^3-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{81}{36\pi}\varDelta V\right)\Rightarrow\varDelta V=\frac{1}{3}\pi R_0^3$ 빠져나가는 물의 비율과 R_0로 표현된 부피의 변화량으로 125초라는 결과를 도출함 (3점) $\varDelta V=\frac{\pi}{3}t_1=\frac{1}{3}\pi R_0^3$ $R_0=5$ 이므로, $t_1=\frac{3}{\pi}\times\frac{1}{3}\pi R_0^3=5^3=125$	8

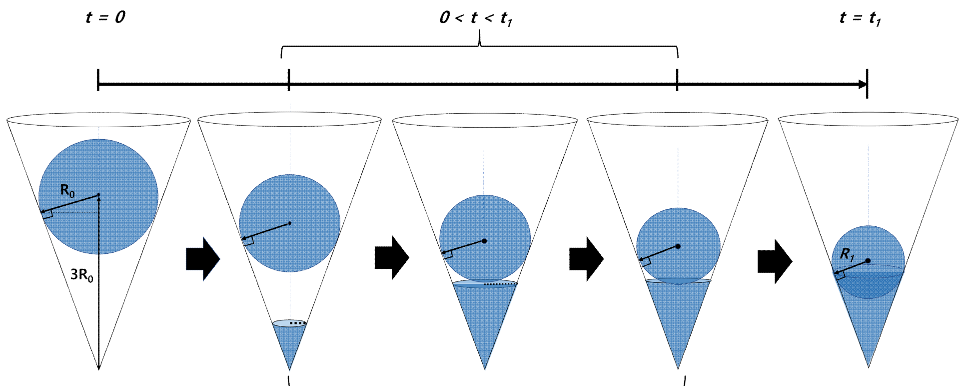
7. 예시 답안 혹은 정답 ※ 선다형의 경우 정답만 기입

(1) 처음 물풍선의 반지름 : R_0

t초 후, 물풍선을 빠져나간 물의 부피 : $V(t)=\frac{\pi}{3}t$

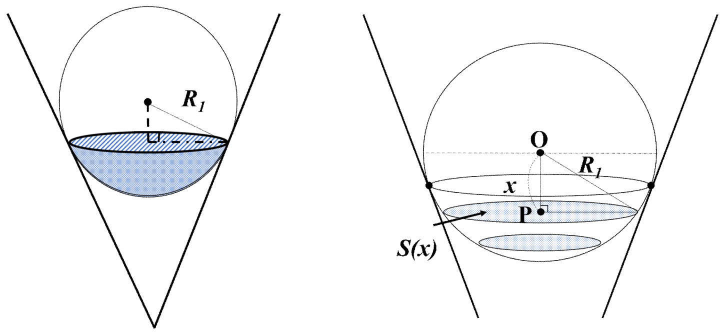
물이 빠져나간 후의 물풍선의 반지름을 R라 하면,

--> 물이 빠져나가 변한 물풍선의 부피 : $V(t)=\frac{\pi}{3}t=\frac{4}{3}\pi\left(R_0^3-R^3\right)$ --> $R=\left(R_0^3-\frac{1}{4}t\right)^{\frac{1}{3}}$



<그림1> <그림2> <그림3(a)>

(2)



<그림3(b)>

물풍선의 반지름은 R_1이고, $\overline{\mathrm{OP}}=x$이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

단면인 원의 반지름은 $\sqrt{(R_1^2-x^2)}$.

따라서, 원의 넓이는 $S(x)=\pi(R_1^2-x^2)$.

(3) 삼각형 닮음을 이용하면 x가 $\frac{1}{3}R_1$부터 R_1까지의 변화에 대해 넓이 $S(x)$를 적분한 값이 된다.

$$\int_{\frac{R_1}{3}}^{R_1}\pi(R_1^2-x^2)dx$$

$$=\pi\left[R_1^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{R_1}{3}}^{R_1}=\pi\left[R_1^3-\frac{R_1^3}{3}-\frac{R_1^3}{3}+\frac{R_1^3}{81}\right]=\frac{28}{81}\pi R_1^3$$

(4) 시각 t_1에서 물에 잠기지 않은 물풍선의 부피와 접선이 이루는 면을 밑면으로 하는 원뿔의 부피의 합은 시각 0초에서 물풍선의 부피와 같아야 한다. 각각을 다음과 같이 구한다.

(가) 시각 0초에서 물풍선의 부피 : $\frac{4}{3}\pi R_0^3$

(나) 빠져나간 물의 부피: $\varDelta V=\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R_1\right)^2\times\frac{8}{3}R_1\times\frac{1}{3}-\frac{28}{81}\pi R_1^3=\frac{64}{81}\pi R_1^3-\frac{28}{81}\pi R_1^3=\frac{36}{81}\pi R_1^3$,

즉. $R_2^3 = \frac{81}{36\pi} \Delta V$

(다) 작아진 풍선의 부피 $\Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{81}{36\pi}\Delta V\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{3}\pi R_0^3$$

따라서, $\Delta V = \frac{\pi}{3} t_1 = \frac{1}{3}\pi R_0^3$. $R_0 = 5$ 이므로,

$t_1 = \frac{3}{\pi}\frac{1}{3}\pi R_0^3 = 5^3 = 125$, t_1 는 125 초