1 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 기하
	핵심개념 및 용어	벡터, 이차함수
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

홍익대학교에는 문헌관, 공학관, 와우관, 홍문관이라 부르는 네 건물이 있다. 학생들의 편의를 위해 <그림 1>과 같이 캠퍼스를 원형으로 순환하는 트램을 설치하고자 한다. 트램 노선에서 건물까지의 거리를 고려하여 트램 노선의 반지름 r를 정하고자 한다. (단, 트램 노선의 너비와 건물의 크기는 무시한다.)

(가) 원점 O에 대한 네 건물의 위치벡터는 각각 다음과 같다.

$$\overrightarrow{x_1}=(4,4),\ \overrightarrow{x_2}=(5,0),\ \overrightarrow{x_3}=(2,3),\ \overrightarrow{x_4}=(1,1)$$

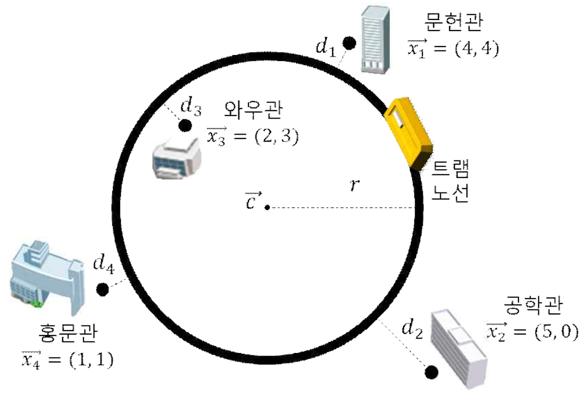
(나) 트램의 노선은 반지름이 r인 원 모양이며, 원점 O에 대한 그 원의 중심의 위치벡터 $\overrightarrow{c}$는 다음과 같다.

$$\overrightarrow{c} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}+\overrightarrow{x_3}+\overrightarrow{x_4}\right)$$

(다) 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리를 각각 d_1, d_2, d_3, d_4라고 하자.

(라) 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리의 제곱의 합 S_4를 $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$으로 정의하자.

(마) 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리 중 최대 거리 M_4를 d_1, d_2, d_3, d_4 중 최댓값으로 정의하자.



<그림 1>

(1) 제시문의 (라)에서 정의된 S_4가 최솟값을 가질 때 반지름 r를 구하시오.

(2) 제시문의 (마)에서 정의된 M_4가 최솟값을 가질 때 반지름 r를 구하시오.

(3) 건물이 n개가 있다고 가정하고 제시문과 같이 원 모양의 트램 노선을 설치하려고 한다. 각 건물의 위치벡터 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \cdots, \overrightarrow{x_n}$ 과 트램 노선의 중심의 위치벡터 $\vec{c} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{x_i}$가 주어졌을 때, 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리의 제곱의 합 $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$ 이 최솟값을 가질 때 반지름 r를 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \cdots, \overrightarrow{x_n}$ 과 $\vec{c}$ 에 대한 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

실생활에서 고등학교 수학 교육과정에서 배운 개념들을 활용하여 주어진 조건에서 해를 찾는 문제에 적용하고 해결할 수 있는지를 평가한다. 또한, 좌표평면과 벡터의 성질을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

(1) 위치벡터의 개념을 이해하고 평면벡터와 좌표의 대응을 활용할 수 있는지 평가한다.

(2) 평면벡터의 크기와 좌표상의 거리의 개념, 원의 성질을 활용하여 문제의 조건에 맞는 함수를 찾을 수 있는지 평가한다.

(3) 이차함수의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문, 문항 (1), (2), (3)	**[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (1), (3)	**[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수** [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문항 (2)	**[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.
문항 (3)	**[수학 I] - (3) 수열 - ② 수열의 합** [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	46-107
	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2018	60-72
	수학	김원경 외	비상교육	2018	43-98
	수학I	홍성복 외	지학사	2020	136-147
	수학I	류희찬 외	천재교과서	2018	140-147
	수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2018	133-143
	기하	홍성복 외	지학사	2019	58-115
	기하	권오남 외	교학사	2019	62-117
	기하	이준열 외	천재교육	2019	60-113

5. 문항 해설

(1) 문제에서 주어진 각 건물의 위치벡터를 이용해 원의 중심으로부터 각 건물까지의 거리를 구한다. 트램노선은 반지름 r인 원이므로 이 거리와 r의 차이가 각 건물에서 트램 노선까지의 최단 거리이다. 최단 거리 제곱의 합은 r에 대한 이차함수이므로, 최솟값을 가질 때의 r를 구할 수 있다.

(2) 반지름 r의 범위에 따라 트램노선에서 가장 멀리 있는, 즉, 최대 거리를 가지는 건물이 바뀐다. r의 범위에 따라 최대 거리가 되는 건물과 그 거리를 찾는다. 이 값이 최소가 되는 r를 구한다.

(3) 문항 (1)에서와 같은 방법을 이용한다. 각 건물의 위치 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ 로부터 트램노선의 중심 $\vec{c}$ 까지의 거리는 $|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 이다. 트램노선까지의 최단 거리는 이 거리와 r의 차이이고 최단 거리의 제곱의 합을 구하면 r에 대한 이차함수이다. 따라서 최솟값을 가질 때의 r을 찾을 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리를 구함 (2점) 최단 거리의 제곱의 합을 r에 대한 이차함수로 구함 (2점) 해당 이차함수가 최솟값을 갖는 r을 구함 (2점)	6
(2)	d_1, d_2, d_3, d_4 중 최대 거리가 될 수 있는 것은 d_2와 d_3임을 확인함 (3점) r의 범위에 따라 M_4를 구하고 문제에서 요구하는 r을 구함 (3점)	6
(3)	$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ 와 $\vec{c}$ 를 이용하여, 각 건물의 위치로부터 트램 노선까지의 최단 거리를 구함 (2점) 최단 거리의 제곱의 합을 r에 대한 이차함수로 구함 (3점) 해당 이차함수가 최솟값을 갖는 r을 구함 (3점)	8

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 트램 노선의 중심의 위치벡터는 $\vec{c} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{x_3} + \overrightarrow{x_4}) = (3, 2)$ 이다.

노선의 중심으로부터 각 건물까지의 거리는 각각 $\left|\overrightarrow{x_1} - \vec{c}\right| = |(1,2)| = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{x_2} - \vec{c}\right| = |(2,-2)| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{x_3} - \vec{c}\right| = |(-1,1)| = \sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{x_4} - \vec{c}\right| = |(-2,-1)| = \sqrt{5}$ 이다.

따라서 각 건물로부터 트램 노선까지의 최단 거리는 각각 $d_1 = |\sqrt{5} - r|$, $d_2 = |2\sqrt{2} - r|$, $d_3 = |\sqrt{2} - r|$, $d_4 = |\sqrt{5} - r|$ 이다. 최단 거리의 제곱의 합 $S_4 = (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)$는

$$S_4 = (\sqrt{5} - r)^2 + (2\sqrt{2} - r)^2 + (\sqrt{2} - r)^2 + (\sqrt{5} - r)^2 \text{이다.}$$
$$= 4r^2 - (6\sqrt{2} + 4\sqrt{5})r + 20$$

S_4는 r에 대한 이차함수이다. 그래프가 아래로 볼록인 포물선이므로 $\frac{d}{dr}S_4 = 0$ 인 $r = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{4}$ 에서 최소이다.

(또는, $S_4 = 4\left(r - \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{21 - 6\sqrt{10}}{2}$ 와 같이 정리하여 최소가 되는 r을 구한다.)

(2) 트램 노선의 중심으로부터 가장 가까운 건물과 먼 건물은 각각 와우관, 공학관이며, 중심으로부터의 거리는 각각 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ 이다. 이 두 거리의 평균인 $r=\frac{3}{2}\sqrt{2}$을 기준으로 $r \le \frac{3}{2}\sqrt{2}$인 경우, (1)에서 구한 트램 노선으로부터 각 건물까지의 거리 d_1, d_2, d_3 중 $d_2 = \left|2\sqrt{2}-r\right|$가 최대이다. 즉, 이 경우 $M_4 = d_2 = |2\sqrt{2} - r| = 2\sqrt{2} - r$이다. $r \ge \frac{3}{2}\sqrt{2}$인 경우, $d_3 = \left|\sqrt{2}-r\right|$가 최대가 된다.

즉, 이 경우 $M_4 = d_3 = |\sqrt{2} - r| = r - \sqrt{2}$이다.

그래프를 그려보면 $r=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 는 에서 최솟값을 가진다.

(3) (1)에서와 같이 생각한다.

각 건물의 위치 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ 로부터 트램노선의 중심 $\vec{c}$ 까지의 거리는 $|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}|$이고,

각 건물에서 노선까지의 최단 거리는 $d_i = \left|\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right| - r\right|$이다. $(i = 1, 2, \cdots, n)$

최단 거리의 제곱의 합은

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right| - r\right)^2 = nr^2 - 2r\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right|^2 \text{이다.}$$

S_n는 r에 대한 이차함수이다. 그래프가 아래로 볼록인 포물선이므로 $\frac{d}{dr}S_n = 0$인

$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right|$ 에서 최소이다.

(또는, $S_n = n\left(r - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right|\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right|^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\overrightarrow{x_i} - \vec{c}\right|\right)^2$와 같이 정리하여 최소가 되는 r을 구한다.)

2 자연계열 논술고사 (오후)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	정적분의 활용
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

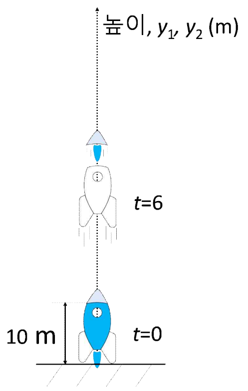
2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

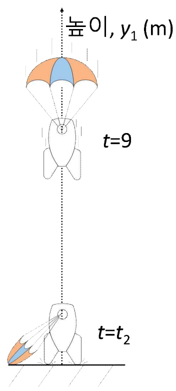
홍익이는 낙하산을 이용하여 우주발사체의 추진체를 재활용하는 기술을 접하였고, 머리와 추진체로 분리되는 물 로켓을 만들고 추진체를 재활용하고자 추진체에 낙하산을 설치하였다. 그리고 $t=0$초에서 물 로켓을 지면으로부터 수직 방향으로 발사하였다. 시각 t에서의 지면으로부터 물 로켓 추진체 밑면의 높이를 $y_1(t)$ m, 물 로켓 머리의 높이를 $y_2(t)$ m라 하자. <그림 1>과 같이 발사 후 $t=6$까지 물 로켓은 머리와 추진체가 같이 움직이고, $t=6$에서 물 분사를 멈추고 머리와 추진체로 분리된다. <그림 2>와 같이 추진체는 $t=9$에서 최고 높이에 도달하고 낙하산이 펴진다. 낙하산에 의하여 $t=12$까지 추진체의 속도가 시간에 따라 변한다. 그 후 착륙할 때까지의 속도는 일정하다. $t=t_2$에서 추진체는 지면에 착륙한다. <그림 3>과 같이 물 로켓 머리의 속도는 $t=6$ 이후 일정하다가 $t=t_1$에서 예상치 못한 돌풍이 발생하여 시간에 따라 변한다. 이를 정리하면, 시각 t에서의 물 로켓 추진체의 속도 $v_1(t)$ m/s와 물 로켓 머리의 속도 $v_2(t)$ m/s는 다음과 같다. (단, $y_1(0)=0$, $y_2(0)=10$ 이다.)

$$v_1(t)=\begin{cases} 20t-\dfrac{5}{2}t^2 & (0\le t<6) \\ 90-10t & (6\le t<9) \\ -10+\dfrac{10}{27}(12-t)^3 & (9\le t<12) \\ -10 & (12\le t\le t_2) \end{cases}$$

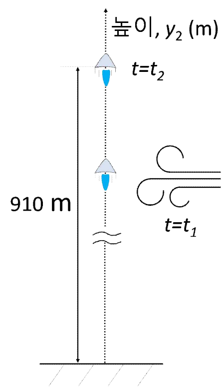
$$v_2(t) = \begin{cases} 20t - \dfrac{5}{2}t^2 & (0 \le t < 6) \\ 30 & (6 \le t < t_1) \\ \dfrac{30}{t_2 - t_1}(t_2 - t) & (t_1 \le t \le t_2) \end{cases}$$



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

(1) $t = 6$에서 물 로켓이 머리와 추진체로 분리될 때, 머리의 높이 $y_2(6)$의 값을 구하시오.

(2) $t = 12$에서 추진체 밑면의 높이 $y_1(12)$의 값을 구하시오.

(3) 추진체가 착륙한 시각 $t = t_2$에서 머리의 높이가 $y_2(t_2) = 910$ m일 때, 돌풍이 발생한 시각 t_1을 구하시오.

3. 출제 의도

우주발사체의 재활용 기술이 주목받는 가운데, 학생들이 관심을 가질 수 있는 대상 중 수학적 해석이 가능한 대상을 문제의 배경으로 삼았다. 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

(1) 속도와 거리에 대한 관계를 이해하고 정적분을 활용하여 속도가 주어졌을 때 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 구간을 나누어 함수를 적분할 수 있는지 평가한다.

(3) 속도와 거리의 상호 관계를 이해하는지 평가한다. 주어진 조건으로부터 식을 구하고 해를 찾아낼 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 문항(1), (2), (3)	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-06] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	132-154
	수학 Ⅱ	황선욱 외 8인	미래엔	2019	135-148
	수학 Ⅱ	김원경 외 14인	비상교육	2018	125-138

5. 문항 해설

(1) 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 물 로켓 머리가 상승한 높이를 속도를 적분하여 구한다. $t=0$일 때 물 로켓 머리의 높이 $y_2(0)$을 더하여 $t=6$일 때 높이 $y_2(6)$를 구한다.

(2) (1)에서와 같이 $t=12$일 때 추진체 밑면의 높이 $y_1(12)$는 시각 $t=0$에서 $t=12$까지 추진체 속도 $v_1(t)$를 적분하고 $t=0$일 때 높이 $y_1(0)$를 더한 값이다.

(3) (2)에서와 같이 추진체의 속도 $v_1(t)$를 적분하여 $y_1(t_2)$를 구한다. 한편, 추진체가 착륙한 시각 t_2에서는 추진체가 착륙하였기 때문에 $y_1(t_2)=0$이다. 이로부터 t_2를 구한다. (1)에서와 같이 $t=t_2$일 때 로켓 머리의 높이 $y_2(t_2)$를 구하고 주어진 값과 비교하여 돌풍이 발생한 시각 t_1을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	정적분을 활용하여 $y_2(6)$의 식을 구하고 값을 계산함	4
(2)	정적분을 활용하여 $y_1(12)$의 식을 구하고 값을 계산함	4
(3)	정적분을 활용하여 $y_1(t_2)$를 구하고, $y_1(t_2)=0$으로부터 t_2를 구함 (6점) 정적분을 활용하여 $y_2(t_2)$를 구하고, $y_2(t_2)=910$으로부터 t_1를 구함 (6점)	12

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) $\dfrac{dy_2}{dt} = v_2$ 이므로 $y_2(6)$는 다음과 같이 $v_2(t)$를 적분하여 구할 수 있다.

$$y_2(6) = y_2(0) + \int_0^6 v_2(t)dt = 10 + \int_0^6 \left(20t - \frac{5}{2}t^2\right)dt$$

$$= 10 + \left[10t^2 - \frac{5}{6}t^3\right]_0^6 = 10 + 360 - 180 = 190 \ \ \mathrm{m}$$

(2) 마찬가지로 $\dfrac{dy_1}{dt} = v_1$ 이므로 $y_1(12)$는 다음과 같이 $v_1(t)$를 적분하여 구할 수 있다.

$$y_1(12) = y_1(0) + \int_0^{12} v_1(t)dt = \int_0^6 \left(20t - \frac{5}{2}t^2\right)dt + \int_6^9 (90 - 10t)dt + \int_9^{12}\left\{-10 + \frac{10}{27}(12-t)^3\right\}dt$$

$$= \left[10t^2 - \frac{5}{6}t^3\right]_0^6 + \left[90t - 5t^2\right]_6^9 + \left[-10t - \frac{5}{54}(12-t)^4\right]_9^{12}$$

$$= (360-180) + \{(810-405) - (540-180)\} + \left\{(-120-0) - (-90 - \frac{15}{2})\right\} = \frac{405}{2} \ \ \mathrm{m}$$

(3) $12 \le t \le t_2$에서 $v_1(t) = -10$ 이고 문항 (2)에서 $y_1(12) = \dfrac{405}{2}$이므로 $y_1(t_2) = 0$인 시간 t_2는

$0 = y_1(t_2) = y_1(12) + \displaystyle\int_{12}^{t_2} v_1(t)dt = \frac{405}{2} - 10(t_2 - 12)$ 로부터 $t_2 = 12 + \dfrac{405}{20} = \dfrac{129}{4}$ 이다.

문항 (1)에서 $y_2(6) = 190$ 이고 주어진 조건에 의해 $y_2(t_2) = 910$ 이므로

$$\begin{aligned}910 = y_2(t_2) &= y_2(6) + \int_6^{t_2} v_2(t)dt = y_2(6) + \int_6^{t_1} v_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} v_2(t)dt \\ &= 190 + \int_6^{t_1} 30\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{30}{t_2 - t_1}(t_2 - t)dt \\ &= 190 + 30(t_1 - 6) + \left[-\frac{15}{t_2 - t_1}(t_2 - t)^2\right]_{t_1}^{t_2} = 190 + 30(t_1 - 6) + \frac{15}{t_2 - t_1}(t_2 - t_1)^2 \\ &= 10 + 15t_1 + 15t_2\end{aligned}$$

로부터 $t_1 = \dfrac{900}{15} - t_2 = 60 - \dfrac{129}{4} = \dfrac{111}{4}$ 이다.

3 자연계열 논술고사 (오후)

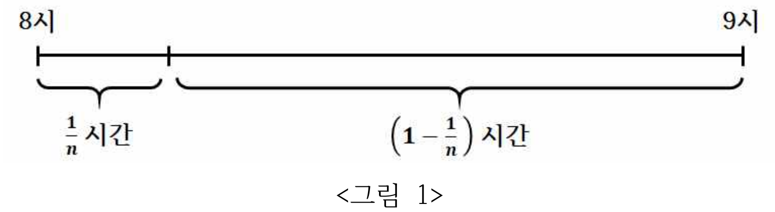
1. 일반정보

유형		☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열 / 문제 3
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	확률의 곱셈정리, 도함수, 수열의 극한
예상 소요 시간		40분 / 전체 120분

2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

(가) 홍익이는 등교하기 위하여 집 앞 버스 정류장에서 매일 아침 8시 정각부터 학교 버스를 기다리기 시작한다. 홍익이가 타려는 학교 버스는 매일 아침 8시부터 9시까지 한 시간 동안 임의의 시각에 무작위로 한 번 정류장에 도착한다. 자연수 n에 대하여 홍익이가 n일 동안 등교한다고 할 때, n일 동안 하루도 빠짐없이 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 홍익이가 버스를 기다리는 사건을 A_n이라고 하자.



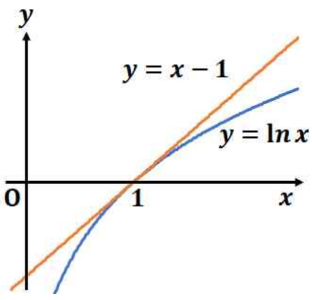
<그림 1>

(나) 로그함수 $y = \ln x$는 다음 성질을 만족한다.

(a) 함수 $y = \ln x$는 무리수 e를 밑으로 하는 로그함수이며, $e = 2.718\cdots$임이 알려져 있다.

(b) 로그함수 $y = \ln x$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

(c) 1이 아닌 양의 실수 x에 대하여 부등식 $\ln x < x - 1$이 성립한다.



<그림 2>

(1) 사건 A_1과 A_2가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A_1)$과 $\mathrm{P}(A_2)$를 각각 구하시오.

(2) 사건 A_n이 일어날 확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구하시오.

(3) 정의역이 $\{x | x > 1\}$인 함수 $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$에 대하여 $\frac{d}{dx}\ln f(x)$를 구하시오.

(4) 제시문의 (나)와 문항 (3)의 결과를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_{n+1}) > \mathrm{P}(A_n)$임을 보이시오.

(5) 홍익이가 n일 동안 적어도 한 번 이상 $\frac{1}{n}$시간보다 짧은 시간 동안 버스를 기다리는 사건을 B_n이라고 하자. 사건 B_n이 일어날 확률을 $\mathrm{P}(B_n)$이라고 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n) > \frac{1}{2}$임을 보이시오.

3. 출제 의도

독립시행의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 로그함수와 합성함수의 도함수를 구할 수 있는지 평가한다. 도함수를 이용하여 함수의 증가, 감소를 파악하고 부등식에 활용할 수 있는지 평가한다. 수열의 극한을 구하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
제시문, 문항(1)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.
제시문, 문항(3)	**[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
문항 (1), (2)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문항 (3)	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ② 도함수** [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
제시문, 문항 (4)	**[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
문항 (5)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한** [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판(주)	2019	66-69, 81-86
	확률과 통계	류희찬 외	천재교과서	2021	65-68, 101-103
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	43-78
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	60-66
	수학Ⅱ	이준일 외	천재교육	2018	60-64
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2020	83-89
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11-15, 53-58, 60-62, 86-89

	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	11-26, 49-57, 76-84
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	11-15, 51-56, 88-93

5. 문항 해설

(1) 확률의 곱셈정리를 활용하여 n이 1일 때와 2일 때의 사건 A_1과 A_2가 일어날 확률을 각각 구한다.

(2) 각각의 날에 주어진 시간보다 오래 버스를 기다리는 사건은 서로 독립이다. 독립시행의 확률에 따라 확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구한다.

(3) 로그함수, 합성함수의 미분법을 활용하여 주어진 함수의 도함수를 구한다.

(4) 제시문에 주어진 로그함수의 성질과 문항 (3)의 결과를 활용한다.

(5) 수열 $\{\mathrm{P}(A_n)\}$의 극한값 $\frac{1}{e}$을 구하고, 이와 (4)의 결과로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_n) < \frac{1}{2}$임을 보인다. 따라서, 여사건의 확률로부터 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n) > 1 - \frac{1}{2}$이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	확률 $\mathrm{P}(A_1) = 0$을 구함 (1점) 확률 $\mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{4}$을 구함 (1점)	2
(2)	확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구함	2
(3)	로그함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구함	2
(4)	함수 $f(x)$가 구간 $(1, \infty)$에서 증가하는 함수임을 보임 (5점) 확률 $\mathrm{P}(A_n)$은 함숫값 $f(n)$과 같음을 이용하여 $\mathrm{P}(A_{n+1}) > \mathrm{P}(A_n)$을 보임 (2점)	7
(5)	사건 B_n은 사건 A_n의 여사건임을 보임 (1점) 수열 $\{\mathrm{P}(A_n)\}$의 극한값을 구함 (3점) 문항 (4)의 결과를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n) > \frac{1}{2}$임을 설명함 (3점)	7

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 학교 버스는 8시와 9시 사이에 도착하므로, $n=1$일 때 홍익이가 $\frac{1}{n}=1$시간보다 더 기다리는 사건 A_1이 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_1)=0$이다. $n=2$일 때 첫날, 둘째날 각각 홍익이가 $\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$시간보다 더 기다리는 사건의 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 두 사건은 서로 독립이므로 A_2가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.

(2) (1)에서와 같이 생각한다. 임의의 등교일에 홍익이가 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 버스를 기다리는 사건의 확률은 $1-\frac{1}{n}$이고, 각각의 등교일에 홍익이가 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 버스를 기다리는 사건은 서로 독립이다. 따라서, 독립시행의 확률에 따라 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$이다.

(3) 정의역이 $\{x\,|\,x>1\}$인 함수 $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$에 대하여 $\ln f(x)=x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$이다. 따라서, 함수 $\ln f(x)$을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$을 얻는다.

(4) 모든 실수 $x>1$에 대하여 $\frac{x}{x-1}>1$을 만족하므로, 제시문 (나)의 (c)를 활용하면,

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<\frac{x}{x-1}-1=\frac{1}{x-1}$이다.

위의 부등식과 문항 (3)의 결과로부터

$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=-\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{1}{x-1}>0$이다.

즉, 함수 $\ln f(x)$은 구간 $(1,\infty)$에서 증가하는 함수이다. 따라서, 제시문 (나)의 로그함수의 성질 (b)를 활용하여 함수 $f(x)$도 구간 $(1,\infty)$에서 증가하는 함수임을 알 수 있다.

문항 (1)의 결과로부터 $\mathrm{P}(A_1)=0$, $\mathrm{P}(A_2)=\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A_1)<\mathrm{P}(A_2)$이다. 또한, 1보다 큰 자연수 n에 대하여 확률 $\mathrm{P}(A_n)$은 함숫값 $f(n)$과 같고, 함수 $f(x)$가 구간 $(1,\infty)$에서 증가하는 함수이므로, $\mathrm{P}(A_{n+1})>\mathrm{P}(A_n)$이다. 따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_{n+1})>\mathrm{P}(A_n)$이다.

(5) 사건 B_n은 사건 A_n의 여사건이므로, $\mathrm{P}(B_n)=1-\mathrm{P}(A_n)$이다. 따라서, $\mathrm{P}(A_n)<\frac{1}{2}$이면 $\mathrm{P}(B_n)>\frac{1}{2}$이므로, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_n)<\frac{1}{2}$임을 보이면 충분하다.

수열 $\{\mathrm{P}(A_n)\}$의 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0+}(1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0-}(1+x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e}$$이다.

만약 어떤 자연수N 에 대하여 $\mathrm{P}(A_N) \geq \frac{1}{2}$이라면, 문항 (4)의 결과에 의하여

$\frac{1}{2} \leq \mathrm{P}(A_N) < \mathrm{P}(A_{N+1}) < \mathrm{P}(A_{N+2}) < \cdots$이므로, 수열의 극한의 대소관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{e} \geq \frac{1}{2}$이다. 이는 제시문 (나)의 (a)에 모순이므로, 모든 자연수 n에 대하여

$\mathrm{P}(A_n) < \frac{1}{2}$이다.