1 자연계열 논술고사 (오전)

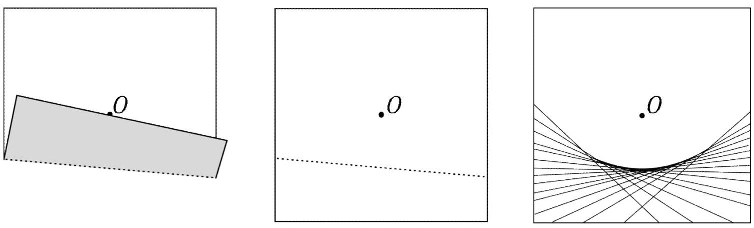
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하, 수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	포물선, 넓이, 정적분
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

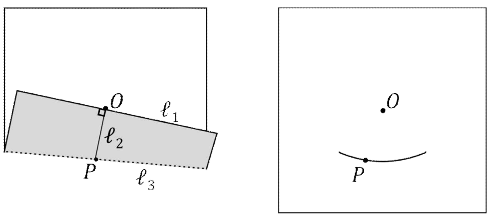
2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

정사각형 종이의 한 변이 중심점 O와 접하도록 여러 번 접었다 펴면, 접힌 자국이 없는 영역과 그 경계를 이루는 곡선이 생긴다(<그림 1>).정사각형 종이의 변 ℓ_1이 중심점 O와 접하도록 접고 ℓ_1 위의 점 O에서 ℓ_1에 수직인 직선 ℓ_2를 그으면, 직선 ℓ_2와 접힌 선 ℓ_3이 만나는 점 P가 경계 곡선 위의 점이 되는 것이 알려져 있다(<그림 2>).



<그림 1>

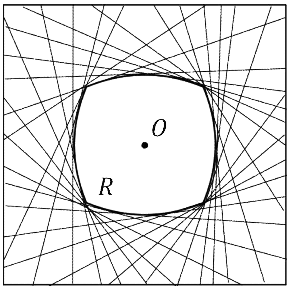


<그림 2>

(1) 중심점 O를 좌표평면의 원점에 두고 직선 $y=-1$에 변을 가지는 종이의 아래쪽을 <그림 1>과 같은 방법으로 접어서 얻는 곡선이 포물선이 되는 이유를 설명하고, 이 포물선의 준선과 초점을 구하시오.

(2) 중심점 O를 좌표평면의 원점에 두고 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$에 네 변을 가지는 정사각형 모양 종이에서, 네 변 각각에 대해 제시문과 같은 방법으로 곡선을 만들었을 때 곡선에 해당하는 식을 모두 구하시오.

(3) 문항 (2)에서 접힌 자국이 없는 영역 R가 아래의 그림과 같이 생성될 때, 이 영역의 넓이를 구하시오.



3. 출제 의도

고등학교 기하 과목에서 제시되는 이차곡선 중 하나인 포물선의 특성을 파악하고, 포물선의 식을 구할 수 있는지 평가한다. 또한, 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문, 문항 (1), (2)	**[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선** [12기하01-01] 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.
문항 (3)	**[수학Ⅱ] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	황선욱 외	MiraeN	2019	11-24
	기하	권오남 외	교학사	2019	10-19

	기하	홍성복 외	지학사	2019	11-15
	수학Ⅱ	김원경 외	비상교육	2018	125-143
	수학Ⅱ	류희찬 외	천재교과서	2018	122-139
	수학Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	140-155

5. 문항 해설

(1) 제시문대로 접었을 때 나타나는 곡선이 포물선임을 파악하고, 그 준선과 초점을 구한다.

(2) 정사각형을 제시문대로 접으면 정사각형의 각 변을 준선으로 삼는 포물선 4개가 나타남을 보이고, 포물선의 식을 구한다.

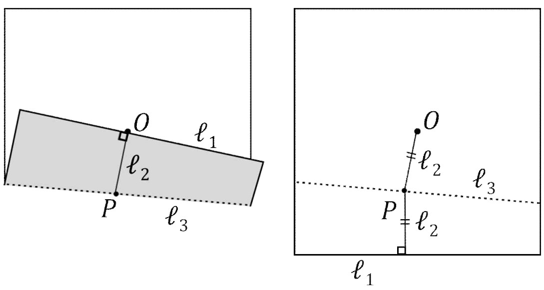
(3) 문항 (2)의 네 포물선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	포물선이 되는 이유를 설명함 (3점) 준선을 구함 (1점) 초점을 구함 (1점)	5
(2)	각 포물선의 식을 구함 (각 포물선 마다 2점)	8
(3)	적분구간을 포함하여 넓이를 구하는 계산식을 정확히 구함 (3점) 정적분을 이용하여 넓이를 구함 (4점)	7

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) 포물선의 정의: 평면 상의 한 점(초점)과 이 점을 지나지 않는 직선(준선)으로부터 거리가 같은 점들의 집합. 제시문의 <그림 2>의 점 P는 원점과 정사각형의 아랫변(직선 $y=-1$)으로부터 거리가 같다. 이는 접힌 흔적 ℓ_3을 기준으로 선대칭을 이루기 때문이다 (아래 그림 참조). 따라서 이와 같은 점들의 집합은 원점 O를 초점, 직선 $y=-1$를 준선으로 가지는 포물선(의 일부)이다.



(2) 위 (1)에 의해 구하는 네 곡선은 각각 점 O를 초점, 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$를 준선으로 가지는 포물선이다. 점 O를 초점, 직선 $y=-1$를 준선으로 가지는 포물선의 식은 원점부터 점 $P(x,\ y)$까지의 거리는 $\sqrt{x^2+y^2}$ 이고 점 P부터 직선 $y=-1$까지의 거리는 $|y+1|$이므로 $\sqrt{x^2+y^2}=|y+1|$ 로부터 $x^2+y^2=y^2+2y+1$ 즉, $x^2=2y+1$이다. (또는 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$)

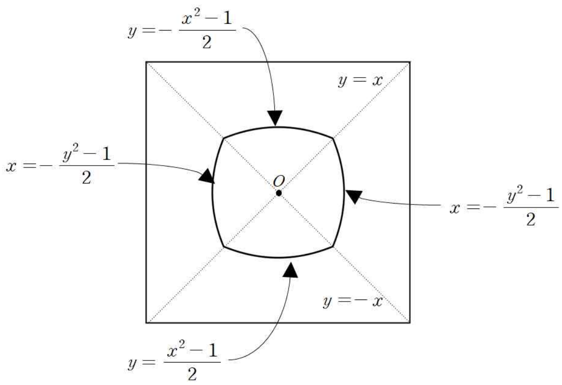
마찬가지로

원점 O를 초점, 직선 $x=1$을 준선으로 가지는 포물선의 식은 $y^2=-2x+1$

원점 O를 초점, 직선 $x=-1$을 준선으로 가지는 포물선의 식은 $y^2=2x+1$

원점 O를 초점, 직선 $y=1$을 준선으로 가지는 포물선의 식은 $x^2=-2y+1$이다.

(3) 대칭을 고려하면 정사각형의 각 변을 준선으로 삼는 각각의 포물선은 $y=x$와 $y=-x$ 2개의 직선으로 그 경계가 나뉜다. (아래 그림 참조)



아래쪽 포물선 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$과 직선 $y=x$의 교점은 $x^2-2x-1=0$ 로부터 $x=y=1\pm\sqrt{2}$ 이다. 두 교점 중 위의 그림에서 왼쪽 아래의 교점(즉, 3사분면의 교점)은 $x=1-\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$이다.

구하는 면적은 대칭으로부터 포물선 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$와 직선 $y=x$, y축으로 둘러싸인 부분의 면적의 8배이다.

구간 $1-\sqrt{2}\le x\le 0$ 에서 포물선 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$는 직선 $y=x$ 아래쪽에 있으므로 정적분을 이용하여 구하는 면적을 계산하면

$$8\times\int_{1-\sqrt{2}}^{0}\left(x-\frac{x^2-1}{2}\right)dx=8\times\left[-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_{1-\sqrt{2}}^{0}=8\times\frac{4\sqrt{2}-5}{6}=\frac{16\sqrt{2}-20}{3}$$ 이다.

2 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률, 조건부확률, 독립과 종속의 의미 이해
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

디지털 통신에서 송신기가 1비트(bit) 0 또는 1을 전송하는 상황을 생각하자. 송신기가 1을 보내었어도 다른 신호에 의한 간섭 때문에 수신기는 0을 받을 수도 있다. 또는, 송신기가 0을 보내었어도 수신기는 1을 받을 수 있다.

이러한 간섭의 효과를 줄이기 위해 현대 통신에서 송신기는 하나의 비트를 한 번 보내는 대신 동일한 비트를 연속으로 n번(이때 n은 홀수인 자연수) 반복하여 보낸다. 이러한 반복을 통해 간섭에 의한 최종 오류를 줄일 수 있는데, 이를 n-반복 코드(n-repetition code)라고 한다. 수신기에서 받은 n개의 비트들을 기준으로 송신기가 보낸 비트가 무엇인지를 결정하게 되며, 이때 수신기는 더 많이 받은 비트를 송신기가 보내었다고 결정한다.

예시: $n=5$인 5-반복 코드의 경우, 1을 보내는 대신, 송신기는 1을 5개 붙여서 11111을 송신한다. 이때, 간섭에 의해 각각의 비트는 변화할 수 있다. 수신기가 10011을 받았다면 0이 두 개이고 1이 세 개이므로 수신기는 송신기가 보낸 비트는 1이라고 최종결정한다. 혹은, 수신기가 10000을 받았다면 수신기는 송신기가 보낸 비트가 0이라고 최종결정하게 된다. 이처럼 수신기가 최종결정한 비트가 송신기가 보낸 비트와 서로 다른 경우 '최종결정오류'가 발생했다고 하자.

아래와 같은 가정을 하자, n-반복 코드 내에서 각각의 비트는 독립적으로 간섭에 노출되어 바뀌고 그 확률은 p이다.

즉,
- 0을 보낼 때, 간섭에 의해 수신기가 1을 받을 확률은 p이다.
- 1을 보낼 때, 간섭에 의해 수신기가 0을 받을 확률은 p이다.
- 간섭에 의한 영향을 받지 않아 0 또는 1이 바뀌지 않고 수신기가 그대로 받을 확률은 $1-p$이다.

(1) 보통의 경우, 각각의 비트가 간섭에 의해 바뀔 확률 p를 0.1이라 하자. 이때, 3-반복 코드 수신기의 최종결정 비트와 송신기가 보낸 비트가 서로 달라 최종결정오류가 발생할 확률을 구하시오.

(2) 갑작스런 태양의 활동으로 각각의 비트가 바뀔 확률 p가 0.1에서 0.2로 늘어났다고 하자. 이때, 동일하게 구성된 3-반복 코드 수신기의 최종결정오류 확률을 구하시오. 그리고, 이 값이 문항 (1)에서 구한 확률의 몇 배인지 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 구하시오.

(3) 문항 (2)와 같이 태양 활동이 활발한 경우($p=0.2$), 수신기의 최종결정오류를 줄이기 위해 송신기의 비트를 m번 반복하는 m-반복 코드를 설계하려고 한다. 단, m-반복 코드 수신기의 최종결정오류 확률값이, 문항 (1)에서 구한 $p=0.1$일 때의 3-반복 코드의 최종결정오류 확률값보다 더 작도록 설계하고 싶다. 필요한 m의 최솟값을 아래의 표를 참고하여 구하시오.

$2^{10}=1024$	$2^{11}=2048$	$2^{12}=4096$	$2^{13}=8192$	$2^{14}=16384$
$2^{15}=32768$	$2^{16}=65536$	$2^{17}=131072$	$2^{18}=262144$	$2^{19}=524288$
$63\times2^{18}=16515072$	$21\times2^{17}=2752512$	$9\times2^{17}=1179648$	$9\times2^{15}=294912$	$35\times2^{13}=286720$

3. 출제 의도

사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있는지 평가한다.

확률의 곱셈정리를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.

독립시행의 확률을 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

이항분포를 이해하고 활용할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	**[확률과통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.
문항 (1), (2), (3)	**[확률과통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판사	2019	61-74
	확률과 통계	배종숙 외	금성출판사	2019	66-89
	확률과 통계	황선욱 외	미래출판사	2019	58-75

5. 문항 해설

제시문에서와 같이 m개의 비트를 송신했을 때 간섭에 의해 변화하는 비트의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{m},\mathrm{p})$를 따름을 알 수 있다. 이를 이용하여 구하는 확률을 계산하고 비교할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	최종결정오류가 발생할 확률의 식을 구함 (2점) 확률값을 계산함 (3점)	5
(2)	최종결정오류가 발생할 확률의 식을 구함 (2점) 확률값을 계산함 (2점) (1)에서 구한 값과 비를 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구함 (1점)	5
(3)	$p=0.2$, $m=5,7,9$인 각 경우 최종결정오류가 발생할 확률의 식을 구하고, 값을 구함 (또는 일부 항의 값을 구하여 확률값을 (1)에서 구한 값과 비교) - $p=0.2$, $m=5$ 인 경우 (3점) - $p=0.2$, $m=7$ 인 경우 (3점) - $p=0.2$, $m=9$ 인 경우 (4점)	10

7. 예시 답안 혹은 정답

제시문에서와 같이 m개의 비트를 송신했을 때 간섭에 의해 변화하는 비트의 개수는 이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{m},\mathrm{p})$를 따름을 알 수 있다. 즉, X를 이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{m},\mathrm{p})$를 따르는 이산확률변수라 하면 m개의 비트를 송신했을 때 간섭에 의해 k개의 비트가 변화할 확률은 $\mathrm{P}(X=k)=\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}$이다.

m번 반복해서 보낸 비트를 수신기가 잘못 최종결정할 경우는 m개의 비트 중 $n+1$개 이상의 비트가 간섭에 의해 변화한 경우이다. (단, $m=2n+1$이라 하자) 따라서 m-반복 코드의 최종결정 오류 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq \mathrm{n}+1) &= \mathrm{P}(X=n+1)+\mathrm{P}(X=n+2)+\cdots+\mathrm{P}(X=m)\\ &= \binom{m}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{m-(n+1)}+\binom{m}{n+2}p^{n+2}(1-p)^{m-(n+2)}+\cdots+\binom{m}{m}p^m(1-p)^0\end{aligned}$$

이다.

(1) $m=3, p=0.1$인 경우이다. 위와 같이 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{3}{2}\times 0.1^2\times 0.9+\binom{3}{3}\times 0.1^3=0.028$ 이다.

(2) $m=3, p=0.2$인 경우이다. 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{3}{2}\times 0.2^2\times 0.8+\binom{3}{3}\times 0.2^3=0.104$ 이다.

(1)에서 구한 확률과의 비는 $\frac{0.104}{0.028}=3.7142...$이고 소수점 둘째 자리에서 반올림하면 3.7 이다.

(3) $p=0.2$, $m=5,7,9$인 각 경우 최종 결정 오류가 발생할 확률을 문제에서 주어진 표를 이용하여 대략 구하여 (1)에서 구한 값 0.028과 비교한다.

$m=5, p=0.2$ 일 때, 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{5}{3}\times 0.2^3\times 0.8^2+\binom{5}{4}\times 0.2^4\times 0.8^1+\binom{5}{5}\times 0.2^5\times 0.8^0$ 이다.

$\binom{5}{3}\times 0.2^3\times 0.8^2=0.0512>0.028$이므로 이 확률값은 0.028 보다 크다.

마찬가지로 $m=7, p=0.2$ 일 때, 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{7}{4}\times 0.2^4\times 0.8^3+\binom{7}{5}\times 0.2^5\times 0.8^2+\binom{7}{6}\times 0.2^6\times 0.8^1+\binom{7}{7}\times 0.2^7\times 0.8^0$ 인데,

$\binom{7}{4}\times 0.2^4\times 0.8^3=0.028672>0.028$ 이므로 이 확률값은 0.028 보다 크다.

$m=9, p=0.2$ 일 때, 최종 결정 오류가 발생할 확률은

$\binom{9}{5}\times 0.2^5\times 0.8^4+\binom{9}{6}\times 0.2^6\times 0.8^3+\binom{9}{7}\times 0.2^7\times 0.8^2+\binom{9}{8}\times 0.2^8\times 0.8^1+\binom{9}{9}\times 0.2^9\times 0.8^0$ 이다.

문제에서 주어진 표를 이용하여 계산하면 $\binom{9}{5}\times 0.2^5 \times 0.8^4 + \binom{9}{6}\times 0.2^6 \times 0.8^3 = 0.019...$이다.

$\binom{9}{7}\times 0.2^7 \times 0.8^2 = 2.95..\times 10^{-4}$이고 마지막 두 항은 이 값보다도 작으므로

최종 결정 오류가 발생할 확률은 $0.019...+3\times(3\times 10^{-4}) < 0.020...$ 보다 작다.

따라서 (1)에서 구한 값 0.028 보다 작아지는 m의 최솟값은 m=9 이다.

3 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

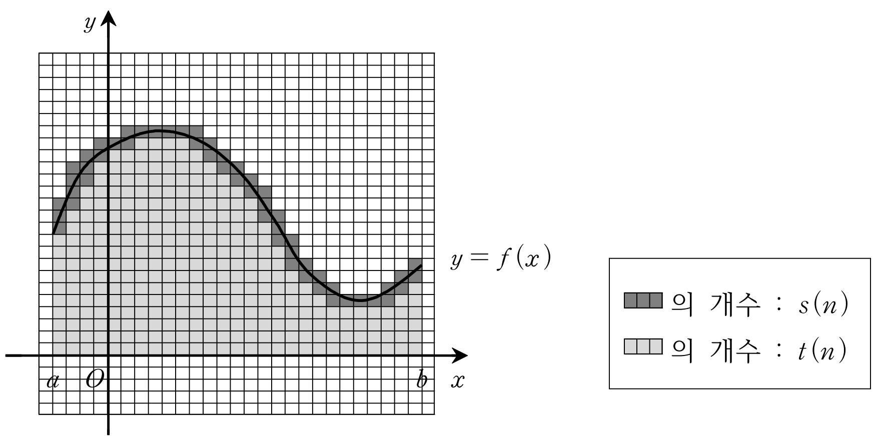
유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사
전형명	논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3
출제 범위 - 수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분
출제 범위 - 핵심개념 및 용어	부등식, 수열의 합, 수열의 극한, 정적분의 활용
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분

2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

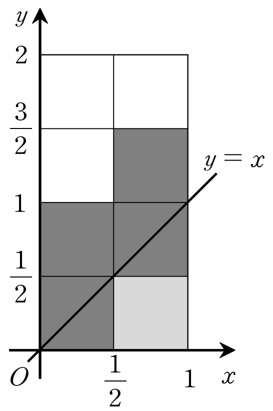
(가) 홍익이는 컴퓨터 화면에 그려진 함수의 그래프를 보고, 확대하면 작은 픽셀들로 그림이 그려지는 것을 확인하였다. 곡선을 그리는 픽셀들을 보고, 픽셀의 개수를 셈으로써 곡선의 길이, 그리고 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지 궁금하였다.

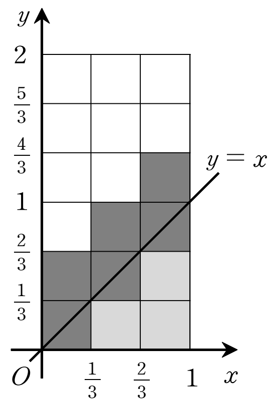
픽셀들을 더 작게 하여 촘촘하게 하면서, 해당되는 픽셀의 개수와 픽셀의 넓이의 곱, 또는 해당되는 픽셀의 개수와 픽셀의 한 변의 길이의 곱 등의 극한을 취하면 영역의 넓이 또는 곡선의 길이와 관련이 있으리라 예상하였고, 아래 (나)와 같은 설정으로 시작하여 수식으로 확인하고자 하였다.



(나) 자연수 n에 대해, 좌표평면을 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형으로 이루어진 모눈종이(격자)로 생각하자. 이때 x축과 y축을 모눈의 경계선 중에 포함한다. 여기에서는, 각 정사각형 영역은 옆쪽과 아래쪽 경계선은 포함하고 위쪽 경계선은 포함하지 않는다고 하자. 또한, 정사각형 영역이 곡선의 점을 하나라도 포함하는 경우 그 곡선을 만난다고 하자. 구간 $[a, b]$에서 정의되는 음이 아닌 값을 갖는 연속 함수 $f(x)$에 대해, $y=f(x)$의 그래프 곡선과 만나는 정사각형들의 개수를 $s(n)$이라 하고, x축과 곡선 사이에서 x축과는 만나도 되지만 그래프 곡선과는 만나지 않는 정사각형들의 개수를 $t(n)$이라 하자. 단, a, b는 정수만 고려하고, 구간 $[a, b]$를 넘어서는 정사각형은 고려하지 않는다.

예를 들어, 아래의 그림과 같이 구간 $[0, 1]$에서의 함수 $f(x)=x$에 대해, $s(2)=4$, $t(2)=1$이고, $s(3)=6$, $t(3)=3$이다.





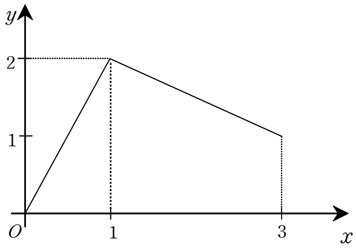
(1) 실수 c에 대해 가우스 기호 $[c]$는 c를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다. 즉 c에 대해 $m \le c < m+1$인 정수 m이 $[c]$의 값이다. 임의의 실수 c에 대해, 분모가 자연수 n이고 분자가 정수인 분수 중에서 c를 넘지 않는 가장 큰 분수를 가우스 기호를 이용하여 표시하시오.

(2) 닫힌 구간 $[a, b]$를 길이 $\frac{1}{n}$인 구간들로 분할하였을 때, k번째 구간에서의 $f(x)$의 최솟값을 m_k, 최댓값을 M_k라 하자. $s(n)$과 $t(n)$의 식을 가우스 기호와 $\sum$ 기호를 이용하여 나타내시오.

(3) 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 식이 다음과 같다고 한다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x < 1) \\ -\frac{1}{2}(x-1)+2=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

주어진 $f(x)$에 대하여 $s(n)$와 $t(n)$을 자연수 n에 관한 다항식으로 나타내시오.



(4) 문항 (3)의 $f(x)$와 이에 대한 $s(n)$, $t(n)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$을 구하시오. 이 중에서 문항 (3)의 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이 영역의 넓이와 같은 것은 무엇인가? $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$은 $y=f(x)$의 그래프의 길이를 나타내는가?

3. 출제 의도

Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 평가한다.
수열의 극한에 대한 성질을 이해하고, 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문, 문항 (2), (3), (4)	**[미적분] - (3) 적분 - ③ 정적분의 활용** [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 (1)	**[수학] - (1) 문자와 식 - ⑥ 여러 가지 방정식과 부등식** [10수학01-14] 미지수가 1개인 연립일차부등식을 풀 수 있다.
문항 (4)	**[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한** [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학	고성은 외	좋은책 신사고	2018	73-104
	수학	김원경 외	비상	2018	71-98
	수학	류희찬 외	천재교과서	2018	75-98

	수학I	홍성복 외	지학사	2018	136-147
	수학I	고성은 외	좋은책 신사고	2018	133-143
	수학I	황선욱 외	미래엔	2018	143-154
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	11-29, 161-186
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	10-28, 163-189
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	10-27, 160-180

5. 문항 해설

(1) 주어진 조건을 부등식으로 나타내고 문제에서 주어진 가우스 기호의 정의를 이용하여 구한다.

(2) 줄간격이 $\frac{1}{n}$인 모눈종이에 그려진 함수의 그래프를 생각한다. k번째 구간 위의 정사각형 중 문제에서 $s(n)$, $t(n)$을 구하는데 해당되는 정사각형의 개수를 구한다. $s(n)$, $t(n)$의 식을 Σ를 활용하여 나타낸다.

(3) 주어진 함수는 길이가 $\frac{1}{n}$인 각 구간에서의 증가(또는 감소)하므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 쉽게 구한다. (2)의 결과를 이용하여 $s(n)$, $t(n)$의 식을 구하고 정리한다.

(4) 수열의 극한을 구하고 넓이와 길이를 계산하여 비교한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 설명과 답안의 수식이 정확한 경우 (2점) - 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (1점)	2
(2)	- $s(n)$을 정확히 구함 (4점) - $t(n)$을 정확히 구함 (3점)	7
(3)	- $s(n)$을 합을 이용하여 정확히 구함 (3점) - $t(n)$을 합을 이용하여 정확히 구함 (4점)	7
(4)	- 세 극한을 (3)의 식을 이용하여 구하기 (2점) - 영역의 면적과 $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$이 같음을 설명 (넓이의 값과 비교 또는 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 설명) (1점) - 그래프의 길이와 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$의 값이 같지 않음을 설명 (길이 값 제시) (1점)	4

7. 예시 답안 혹은 정답

(1) $\frac{m}{n}$이 문제에서 구하는 분수라면 $\frac{m}{n} \le c < \frac{m+1}{n}$ 이다. 즉, $m \le nc < m+1$ 이므로,

$m = [nc]$이고, $\frac{m}{n} = \frac{[nc]}{n}$이 된다.

(2) 줄간격이 $\frac{1}{n}$인 모눈종이에 함수의 그래프를 그렸다고 생각하자.

x축상의 두 점 a, b 사이에는 길이 $\frac{1}{n}$인 작은 구간이 $n(b-a)$개 있다.

k번째 소구간 위쪽의 정사각형(즉, 모눈종이의 칸) 중 그래프와 만나는 가장 아래쪽의 정사각형은 (1)에 의해 밑변의 높이(즉, y좌표)가 $\frac{[nm_k]}{n}$이고, 가장 위쪽의 정사각형은 밑변의 높이가 $\frac{[nM_k]}{n}$이 되어 그래프와 만나는 정사각형의 개수는 $[nM_k] - [nm_k] + 1$이다.

k번째 소구간 위쪽의 정사각형들 중 그래프와 만나지 않고 그 아래쪽에 있는 것들은 위에서 구한 밑변의 높이가 $\frac{[nm_k]}{n}$인 정사각형 아래쪽의 정사각형들이므로 개수는 $[nm_k]$이다.

따라서, $s(n) = \sum_{k=1}^{n(b-a)} ([nM_k] - [nm_k] + 1)$, $t(n) = \sum_{k=1}^{n(b-a)} [nm_k]$ 이다.

(3) 소구간에서 증가하는 함수는 최솟값을 소구간의 왼쪽 끝점에서, 최댓값을 오른쪽 끝점에서 가진다. 감소할 때는 반대이다. k번째 소구간은 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ $(k = 1, 2, \cdots, 3n)$ 이므로 주어진 함수의 증가, 감소를 고려하면 각 소구간에서 최댓값, 최솟값은 아래와 같다.

$$M_k = \begin{cases} \frac{2k}{n} & 1 \le k \le n \\ -\frac{k-1}{2n} + \frac{5}{2} & n+1 \le k \le 3n \end{cases} \qquad [nM_k] = \begin{cases} 2k & 1 \le k \le n \\ \left[\frac{-k+1+5n}{2}\right] & n+1 \le k \le 3n \end{cases}$$

$$m_k = \begin{cases} \frac{2(k-1)}{n} & 1 \le k \le n \\ -\frac{k}{2n} + \frac{5}{2} & n+1 \le k \le 3n \end{cases} \qquad [nm_k] = \begin{cases} 2(k-1) & 1 \le k \le n \\ \left[\frac{-k+5n}{2}\right] & n+1 \le k \le 3n \end{cases}$$

(2)에 의해서

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=1}^{3n} ([nM_k] - [nm_k] + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2k - 2(k-1) + 1) + \sum_{k=n+1}^{3n} \left(\left[\frac{-k+1+5n}{2}\right] - \left[\frac{-k+5n}{2}\right] + 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 3 + \sum_{k=n+1}^{3n} \left(\left[\frac{-k+1+5n}{2}\right] - \left[\frac{-k+5n}{2}\right] \right) + \sum_{k=n+1}^{3n} 1 \end{aligned}$$

이다.

$\sum_{k=1}^{n} 3 = 3n$, $\sum_{k=n+1}^{3n} 1 = 2n$ 이고,

$$\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\left[\frac{-k+1+5n}{2}\right]-\left[\frac{-k+5n}{2}\right]\right)$$

$$=\left(\left[\frac{4n}{2}\right]-\left[\frac{4n-1}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{4n-1}{2}\right]-\left[\frac{4n-2}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{4n-2}{2}\right]-\left[\frac{4n-3}{2}\right]\right)+\ \cdots\ +\left(\left[\frac{2n+1}{2}\right]-\left[\frac{2n}{2}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{4n}{2}\right]-\left[\frac{2n}{2}\right] = 2n-n = n$$

이다. (위 식의 두 번째 줄을 $2\times 2n$ 개의 항의 합으로 볼 때, 중간의 항들은 연이은 두 항씩 서로 상쇄되어 첫 항과 마지막 항만 남는다.)

따라서, $s(n) = 6n$ 이다.

마찬가지로, (2)에 의해

$$t(n) = \sum_{k=1}^{3n}[nm_k] = \sum_{k=1}^{n}2(k-1)+\sum_{k=n+1}^{3n}\left[\frac{-k+5n}{2}\right] \text{ 이다.}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{3n}\left[\frac{-k+5n}{2}\right] &= \left[\frac{4n-1}{2}\right]+\left[\frac{4n-2}{2}\right]+\left[\frac{4n-3}{2}\right]+\left[\frac{4n-4}{2}\right]+\ \cdots\ +\left[\frac{2n}{2}\right]\\ &= \left[2n-\frac{1}{2}\right]+[2n-1]+\left[2n-1-\frac{1}{2}\right]+[2n-2]+\ \cdots\ +[n]\\ &= (2n-1)+(2n-1)+(2n-2)+(2n-2)+\ \cdots\ +n\\ &= \sum_{k=1}^{n}2(2n-k)\end{aligned}$$

이다. (위 식의 두 번째 줄에서 항은 $2n$개이며, 가우스 기호 안의 값은 $\frac{1}{2}$씩 줄어든다. 따라서 그 값은 세 번째 줄에서와 같이 $2n-1, 2n-2, \cdots, n$이 연달아 두 번씩 나타난다.)

$\sum_{k=1}^{n}2(k-1) = 2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2 = n(n+1)-2n = n^2-n$ 이고,

$\sum_{k=1}^{n}2(2n-k) = \sum_{k=1}^{n}4n-2\sum_{k=1}^{n}k = 4n^2-n(n+1) = 3n^2-n$ 이므로,

정리하면 $t(n) = 4n^2-2n$ 이다.

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n^2}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n}{n^2}=4$, $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n}=6$ 이다.

$t(n)$은 그래프의 아래 x축 위쪽의 정사각형들의 개수이고, $\frac{1}{n^2}$는 각 정사각형의 넓이이므로 $\frac{t(n)}{n^2}$는 이 정사각형들의 넓이의 합이다. 그 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$은 그래프와 x축 사이의 넓이이다.

실제로 그래프와 x축 사이의 넓이를 계산하면 (문제의 그림에서 삼각형과 사다리꼴의 넓이의 합) $\frac{1}{2}\times 1\times 2+2\times\frac{(2+1)}{2} = 4$ 이다.

주어진 함수 그래프의 길이는 $(0, 0)$과 $(1, 2)$를 잇는 선분의 길이와 $(1, 2)$와 $(3, 1)$을 잇는 선분의 길이의 합이므로 $\sqrt{1+4}+\sqrt{4+1}=2\sqrt{5}$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$는 그래프의 길이를 나타내지 않는다.