5 자연계열 논술고사 (오전)

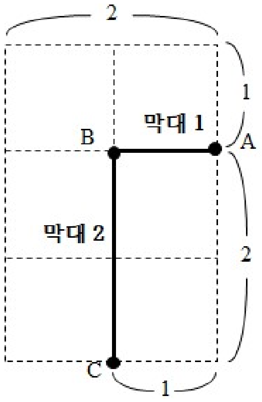
1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 문제 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>수학 I, 미적분, 기하</td></tr>
<tr><td>핵심 개념 및 용어</td><td>삼각함수, 삼각함수의 미분, 속도, 가속도</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

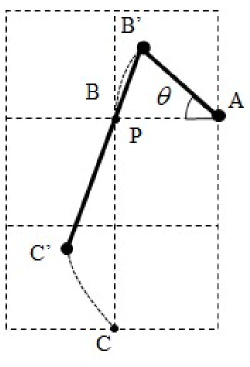
2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

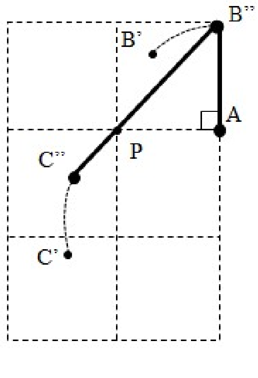
막대 1과 막대 2가 <그림 1>과 같이 B에서 연결되어 있다. 막대 1은 A를 중심으로 시곗바늘이 도는 방향으로 회전하고, 막대 1과 막대 2 사이의 각도는 자유롭게 변할 수 있다. 막대 1이 회전할 때 막대 2는 <그림 2>와 같이 항상 P 점을 지나면서 움직인다. 이때, 막대 1과 막대 2가 연결된 점의 속력은 항상 1이다. 막대 1이 <그림 3>과 같은 위치로 가면, 그다음에는 막대 2가 <그림 4>와 같은 모양이 될 때까지 B”을 중심으로 회전한다.



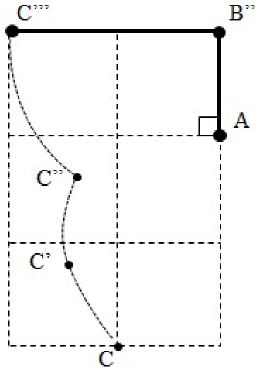
<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>



<그림 4>

(1) <그림 2>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 A와 C' 사이의 거리를 구하시오.

(2) <그림 2>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 C'을 지나는 막대 2의 끝의 속력을 구하시오.

(3) <그림 2>에서 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때 C'을 지나는 막대 2의 끝의 가속도 크기를 구하시오.

3. 출제 의도

좌표평면 위의 점의 좌표를 삼각함수와 평면벡터의 합을 이용하여 나타낼 수 있는지 평가한다. 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 가속도를 삼각함수의 미분을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제1 제시문	**[수학 I] - (2) 삼각함수- ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (1)	**[수학 I] - (2) 삼각함수- ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (2)	**[수학 I] - (2) 삼각함수- ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

	[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적 [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.
문항 (3)	**[수학 I] - (2) 삼각함수- ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분** [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용** [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[기하] - (2) 평면벡터 - ② 평면벡터의 성분과 내적** [12기하02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	75-80
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	70-74
	수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	77-82
	미적분	김원경 외 14인	비상교육	2019	85-86, 106-108
	미적분	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2019	70-71, 112-114
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2019	90-93, 121-123
	기하	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	78-88
	기하	권오남 외 14인	교학사	2019	82-89
	기하	황선욱 외 8인	미래엔	2019	86-95

5. 문항 해설

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$이면 <그림 2>에서 삼각형$\triangle$AB'P는 정삼각형이다. 이를 이용하여 점 C'의 좌표를 구하고 A와 C'사이의 거리를 구할 수 있다.

(2) <그림 2>에서 두 평면벡터 $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{B'C'}$의 성분을 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있다. 이로부터 점 C'의 좌표를 구하고, 삼각함수의 미분을 이용하여 속도와 속력을 구할 수 있다.

(3) 움직이는 점 C'의 가속도와 그 크기를 삼각함수의 미분을 이용하여 구할 수 있다.

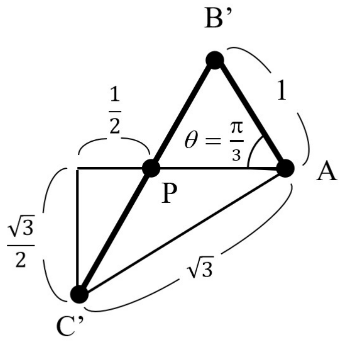
6. 채점 기준

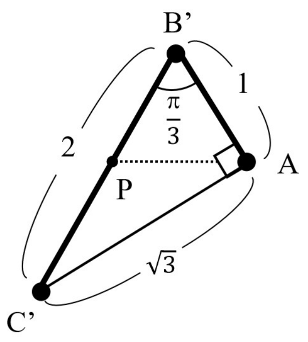
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	거리를 구함 (4점)	4점
(2)	막대 1과 막대 2가 연결된 점의 좌표 $(-\cos\theta, \sin\theta)$를 구함 (2점) $\theta = t$로 치환을 함 (1점) 벡터의 합을 이용하여 막대 2 끝의 좌표를 구함 (5점) 위치 벡터의 좌표를 미분하여 속도와 속력을 구함 (4점)	12점
(3)	위치 벡터의 좌표를 두 번 미분하여 가속도와 그 크기를 구함 (4점)	4점

7. 예시 답안

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$이면 $\triangle$AB'P는 정삼각형이므로 아래 오른쪽 그림과 같이 $\triangle$AB'C'은 한 각이 $\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이 된다. 따라서 A와 C'사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.

(별해) $\triangle$AB'P는 한변의 길이가 1인 정삼각형이므로 아래 왼쪽 그림에서
$\overrightarrow{PB'} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PC'} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이다. $\overrightarrow{PA} = (1,0)$ 이므로
A와 C'사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.

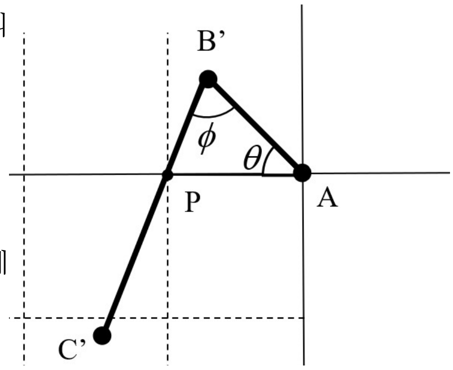




(2) <그림 2>에서 $\overrightarrow{AB'} = (-\cos\theta, \sin\theta)$이다. 두 막대가 연결된 점 B'은 점 A를 중심으로 원운동을 하는데 속력이 1이므로 $\theta = t$ 이다.

△AB'P는 이등변 삼각형이므로 $\phi = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$이다. 따라서 점 B'을 지나고 선분 PA와 수직인 직선과 선분 B'C'사이의 각도는 $\phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\theta}{2}$이고 선분 B'C'의 길이는 2이므로

$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}} = \left(-2\sin\frac{\theta}{2}, -2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ 이다.



A점을 원점으로 하고 직선 PA를 x축으로 하는 좌표에 대하여

막대 2의 끝 C'의 좌표를 (x,y)라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AC'}} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \left(-\cos\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}, \sin\theta - 2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ 이므로

$x = -\cos t - 2\sin\frac{t}{2},\ y = \sin t - 2\cos\frac{t}{2}$ 이다.

$\frac{dx}{dt} = \sin t - \cos\frac{t}{2},\quad \frac{dy}{dt} = \cos t + \sin\frac{t}{2}$ 이므로

막대 2의 끝 C'의 속력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(\sin t - \cos\frac{t}{2})^2 + (\cos t + \sin\frac{t}{2})^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2} - 2(\sin t\cos\frac{t}{2} - \cos t\sin\frac{t}{2})} \\ &= \sqrt{2 - 2\sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (즉, $t = \frac{\pi}{3}$)일 때 속력을 구하면 $\sqrt{2 - 2\sin\frac{\pi}{6}} = 1$ 이다.

(3) 막대 2의 끝 C'의 가속도는 (2)의 결과로부터

$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\cos t + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}, -\sin t + \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$ 이고, 가속도의 크기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{(\cos t + \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2})^2 + (\sin t - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4}(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}) - (\sin t\cos\frac{t}{2} - \cos t\sin\frac{t}{2})} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4} - \sin\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (즉, $t = \frac{\pi}{3}$)일 때 가속도의 크기를 구하면 $\sqrt{\frac{5}{4} - \sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

6 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심 개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 확률의 곱셈정리, 조건부확률, 정규분포
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

송신기 A와 수신기 B로 이루어져 있는 무선 네트워크를 가정하자. 송신기 A와 수신기 B의 거리는 r km 이다 ($r > 0$). 이 무선 네트워크에서 송신기 A는 수신기 B에게 0 또는 1을 보낸다. B는 A로부터 받은 신호 X를 이용하여 A가 0을 보냈는지 또는 1을 보냈는지를 결정하는데, B가 받은 신호 X는 다음과 같은 확률분포를 따른다.

a) 0을 전송한 경우: X는 정규분포 $N(0,\, 0.5^2)$을 따른다.
b) 1을 전송한 경우: X는 정규분포 $N(r^{-2},\, 0.5^2)$을 따른다.

그리고, 수신기 B는 X를 이용하여, 송신기 A가 어떤 것을 보냈는지를 결정한다. 만약 $X > 0.5r^{-2}$이라면 수신기 B는 송신기 A가 1을 보냈다고 결정하고, 그 외의 경우에는 송신기 A가 0을 보냈다고 결정한다. 송신기 A가 0을 보낼 확률과 1을 보낼 확률이 모두 0.5이다.

(1) 송신기 A가 0을 보낼 확률, 1을 보낼 확률을 각각 $P(0\text{보냄})$, $P(1\text{보냄})$이라 하자. 수신기 B에서 오류가 일어날 확률은 조건부 확률을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$P(\text{오류}) = P(0\text{결정} \mid 1\text{보냄}) \times P(1\text{보냄}) + P(1\text{결정} \mid 0\text{보냄}) \times P(0\text{보냄})$$

송신기 A와 수신기 B 사이의 거리 $r = 1$ km 일 때 수신기 B에서 오류가 일어날 확률을 아래의

표준정규분포표 <표 1>을 이용하여 계산하시오.

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.25	0.10
0.50	0.19
0.75	0.27
1.00	0.34
1.25	0.39
1.50	0.43
1.75	0.46
2.00	0.48

<표 1>

(2) 수신기 B에서 오류가 일어날 확률을 거리 $r = 1$ km와 거리 $r = 2$ km인 두 경우에 대하여 각각 계산하시오. 그리고, $r = 1$ km인 경우 오류가 일어날 확률의 제곱과 $r = 2$ km인 경우 오류가 일어날 확률 각각을 소수점 셋째 자리에서 반올림하여 소수점 둘째 자리까지 구하고, 그 둘의 크기를 비교하시오.

(3) 직선 위의 A-B-C로 이루어진 릴레이 통신을 생각해 보자. A는 B에 0 또는 1을 보내고 B는 A로부터 받은 신호 X 를 이용하여 A가 무엇을 보냈는지를 결정한다. 그리고, 릴레이 B는 결정된 신호 (0 또는 1) 를 C에게 보낸다. 이때, C가 B로부터 받은 신호의 확률분포는 제시문에서 언급된 수신기 B가 송신기 A로부터 받은 신호의 확률분포와 동일하다. A와 B 사이의 거리는 1 km이고 B와 C 사이의 거리 또한 1 km라고 하자. 이때, A로부터 2 km 떨어진 수신기 C에서 오류가 일어날 확률을 표준정규분포표 <표 1>을 이용하여 소수점 둘째 자리까지 구하시오. 이를 (2)에서 구한 거리가 $r = 2$ km일 때 수신기 B에서 오류가 일어날 확률과 비교하시오.

3. 출제 의도

확률의 덧셈정리, 확률의 곱셈정리, 사건의 독립, 조건부확률, 정규분포를 이해하고 이를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 조건부확률의 의미를 이해하는지 평가한다. 또한, 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하고 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

(2) (1)에서 구한 확률을 두 가지 경우에 비교할 수 있는지 평가한다.

(3) 확률의 덧셈정리, 여사건의 확률, 확률의 곱셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제2 제시문	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 (1)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 (2)	**[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
문항 (3)	**[확률과 통계] - (2) 확률 - ① 확률의 뜻과 활용** [12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - ② 조건부확률** [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	박교식 외	동아출판	2018	66-74
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	44-46, 53-60, 91-96,
	확률과 통계	고성은 외	좋은책 신사고	2019	50-52, 58-64, 99-101
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	50-52, 58-64, 99-102

5. 문항 해설

(1) 정규분포를 따르는 확률변수를 표준화하고 표준정규분포표를 이용하여 문제의 식에서 주어진 확률을 계산할 수 있다.

(2) (1)에서 구한 확률을 두 경우 비교한다.

(3) 수신기 C에서 오류가 일어나는 경우를 나누어 각 사건이 서로 독립, 배반인지 고려한다. 여사건의 확률, 확률의 곱셈정리, 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	오류가 일어날 (조건부) 확률을 정규분포 확률변수로 나타냄 (2점) 이 확률을 표준정규분포 확률변수 Z로 변환하여 나타냄 (2점) 표준정규분포표를 이용하여 확률값을 계산함 (2점)	6점
(2)	r = 2일 때 확률을 계산함 (3점) r = 1일 때 확률의 제곱을 구하고 이를 비교함 (1점)	4점
(3)	C에서 오류가 일어나는 경우를 설명하고, 이를 이용하여 C에서 오류가 일어날 확률을 나타냄 (4점) A-B와 B-C에서 오류가 일어날 확률을 각각 구함 (4점) C에서 오류가 일어날 확률을 구함 (2점)	10점

7. 예시 답안

(1) 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$를 따르는 확률변수 X에 대해

확률변수 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$는 표준정규분포 $N(0,1)$를 따른다.

송신기 A가 1을 보냈을 때, 수신기 B가 받은 신호 X는 정규분포 $N(r^{-2}, 0.5^2)$을 따르므로

$$P(0\text{결정} \mid 1\text{보냄}) = P(X \le 0.5r^{-2})$$
$$= P(0.5Z + r^{-2} \le 0.5r^{-2}) = P(Z \le -r^{-2}) = P(Z > r^{-2}) \text{ 이다.}$$

마찬가지로 A가 0을 보냈을 때, B가 받은 신호 X는 $N(0, 0.5^2)$을 따르므로

$$P(1\text{결정} \mid 0\text{보냄}) = P(X > 0.5r^{-2}) = P(0.5Z > 0.5r^{-2}) = P(Z > r^{-2}) \text{ 이다.}$$

송신기 A가 0과 1을 보내는 확률을 각각 0.5이므로 오류가 일어날 확률은 주어진 식으로부터

$$P(\text{오류}) = P(0\text{결정} \mid 1\text{보냄}) \times P(1\text{보냄}) + P(1\text{결정} \mid 0\text{보냄}) \times P(0\text{보냄})$$
$$= P(Z > r^{-2}) \times 0.5 + P(Z > r^{-2}) \times 0.5 = P(Z > r^{-2}) \quad \text{이다.}$$

$r = 1$ 일 때, 이 확률은 표준정규분포표로부터 $P(Z > 1) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.16$ 이다.

(2) (1)에서 구한 식으로부터

r = 2km일 때 오류가 일어날 확률은 P(Z > 0.25) = 0.4 가 된다.

r = 1km일 때 확률의 제곱의 값은 0.16^2 = 0.0256 이다.

둘을 비교하면 r = 2일 때 오류를 일으킬 확률이 더 크다.

(3) 송신기-수신기 A-B와 B-C 각각에서 오류가 일어날 수 있다.

따라서 C에서 오류가 일어나는 경우는 (즉, C에서 A가 보낸 신호와 반대로 결정하는 경우는)

A-B에서 오류가 발생하고 B-C에서 무오류인 경우와

A-B에서 무오류이고 B-C에서 오류가 발생하는 경우이다.

A-B와 B-C에서 오류가 일어나는 두 사건은 서로 독립사건이며,

여사건의 확률에 의해 (무오류일 확률) = 1 - (오류일 확률) 이므로

A-B에서 오류가 일어날 확률을 p, B-C에서 오류가 일어날 확률을 q라 하면

(수신기 C에서 오류가 일어날 확률) = $p(1-q)+(1-p)q$ 이다.

송신기로부터 거리가 r인 수신기에서 오류가 일어날 확률을 (1)에서와 같이 구하면

$$\begin{aligned} P(\text{오류}) &= P(0\text{결정} \mid 1\text{보냄}) \times P(1\text{보냄}) + P(1\text{결정} \mid 0\text{보냄}) \times P(0\text{보냄}) \\ &= P(Z > r^{-2}) \times P(1\text{보냄}) + P(Z > r^{-2}) \times P(0\text{보냄}) \\ &= P(Z > r^{-2}) \times \{P(1\text{보냄}) + P(0\text{보냄})\} = P(Z > r^{-2}) \quad \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 A-B에서 오류가 일어날 확률 p와 B-C에서 오류가 일어날 확률 q는 모두

$P(Z>1)=0.16$ 이고. 위에서 구한 식에 의해

(수신기 C에서 오류가 일어날 확률) = $p(1-q)+(1-p)q = 2\times 0.16\times 0.84 = 0.27$ 이다.

이 확률은 (2)에서 구한 송신기-수신기의 거리가 2km일 때 수신기에서 오류가 일어날 확률 0.4 보다 작다. 즉, A-C 사이에 B가 있어서 신호를 중계할 때 오류가 발생할 확률이 더 작게 된다.

7 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심 개념 및 용어	접선, 삼각비, 삼각함수
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

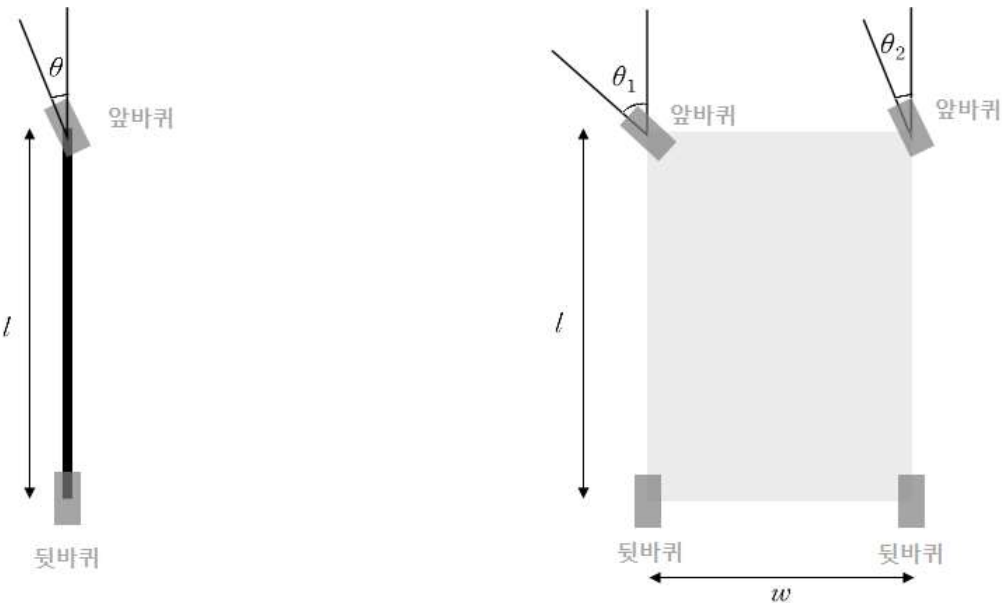
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

(가) 자전거를 <그림 1>과같이 각 바퀴의 중심이 양 끝점에 있는 길이가 l인 선분으로 볼 수 있다. 앞바퀴의 진행 방향은 선분과 일정한 각도 θ를 유지하고, 뒷바퀴의 진행 방향은 항상 선분과 같은 방향이다. 각각의 바퀴는 미끄러지지 않고 진행한다 ($\theta > 0$).
※ 앞바퀴와 뒷바퀴가 지나간 자취는 서로 다른 원 위에 있음이 알려져 있다.

(나) 자동차의 움직임을 <그림 2>와 같이 각 바퀴의 중심이 네 꼭짓점에 있는, 가로의 길이가 w이고, 세로의 길이가 l인 직사각형의 움직임으로 볼 수 있다. 두 앞바퀴의 진행 방향은 세로 방향과 일정한 각도 θ_1, θ_2를 각각 유지하고, 뒷바퀴의 진행 방향은 세로 방향과 항상 같은 방향이다 ($\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$). 각각의 바퀴는 미끄러지지 않고 진행한다.

(다) 각 바퀴의 회전 반지름은 '바퀴의 중심에서 해당 바퀴가 그리는 원의 중심까지 거리'로 정의하고, 모든 바퀴의 두께와 크기는 무시한다.



<그림 1> <그림 2>

(1) <그림 1>에서 앞바퀴 회전 반지름과 뒷바퀴 회전 반지름을 각각 θ와 l로 나타내시오.

(2) <그림 2>에서 각도 θ_1과 각도 θ_2의 관계식을 l과 w를 사용하여 구하시오.

(3) (2)번과 같은 조건으로 자동차가 움직일 때, 바퀴가 도로에서 벗어나지 않고 지나갈 수 있는 도로의 최소 폭 s를 l, w, θ_2만을 사용하여 구하시오.

3. 출제 의도

삼각형의 내각과 외각, 원과 접선 등 삼각형과 원의 성질을 이해하고 삼각함수를 이용하여 도형의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 주어진 각도와 길이로부터 삼각함수를 이용하여 원의 반지름을 구할 수 있는지 평가한다.

(2) (1)에서 구한 식을 이용하여 두 각도 사이의 관계를 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 문제에서 요구하는 길이가 두 원의 반지름의 차이임을 이해하고 (1), (2)의 결과를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정	교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
문제3 제시문 문항 (1), (2), (3)	**[수학] - (2) 기하 - ③ 원의 방정식** [10수학 02-07] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. **[수학 I] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수** [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	75-80
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	70-74, 92-96
	수학 I	김원경 외 14인	비상교육	2018	71-75
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	146-148
	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	142-144
	수학	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	139-141

5. 문항 해설

(1) 원의 중심은 접점에서 접선과 수직인 직선 상에 있으므로 중심이 일치하는 두 원의 접선과 접점을 각각 알면 두 수선의 교점이 공통의 중심이 된다. 문제에서 주어진 각도와 길이로부터 삼각함수를 이용하여 원의 반지름을 구한다.

(2) (1)의 결과를 두 경우에 적용하여 문제에서 주어진 두 각도 사이의 관계를 구한다.

(3) 문제에서 구하는 길이는 (1), (2)에서 구한 네 개의 원 중 두 원의 반지름의 차이다. 이를 (1), (2)의 결과를 이용하여 문제에서 주어진 길이와 각도로 나타낸다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	앞바퀴와 뒷바퀴의 회전 반지름을 각각 구함 (각 2점씩)	4점
(2)	뒷바퀴 2개의 회전 반지름을 각각 구함 (각 2점씩) 위의 두 회전 반지름과 자동차의 너비 w 사이의 관계를 이용하여 식을 구함 (4점)	8점
(3)	네 바퀴의 회전 반지름 중 최솟값과 최댓값을 구함 (각 2점씩) 두 반지름의 차이가 도로의 최소 폭임을 설명하고 l, w, θ_2을 이용하여 그 값을 구함 (4점)	8점

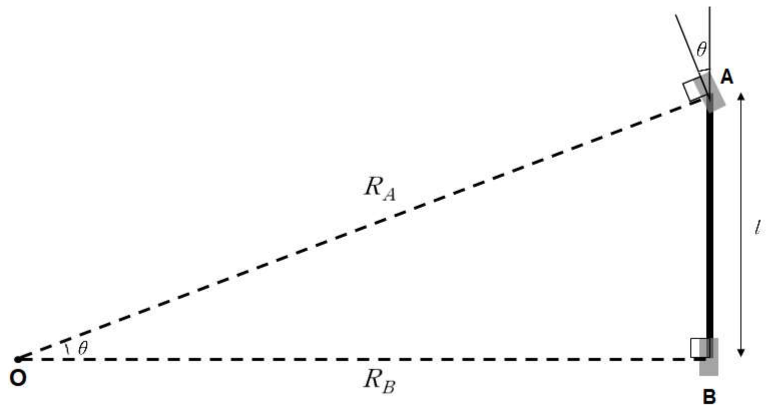
7. 예시 답안

(1) 각 바퀴의 진행 방향은 회전 반지름과 수직이다.

따라서 아래의 그림에서 앞바퀴의 진행 방향에 수직인 직선과 뒷바퀴의 진행 방향에 수직인 직선의 교점 O는 앞바퀴, 뒷바퀴가 각각 그리는 두 원의 공통의 중심이다. 그림에서 앞바퀴의 회전 반지름(빗변)은 $\overline{OA} = R_A$, 뒷바퀴의 회전 반지름(밑변)은 $\overline{OB} = R_B$ 이다.

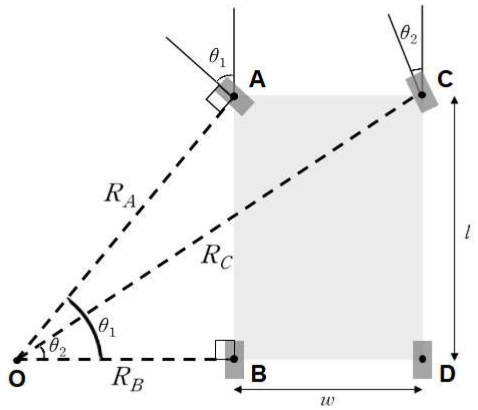
직각삼각형 AOB의 높이는 두 바퀴 사이의 거리 l이고 $\angle AOB$는 앞바퀴의 진행 방향 각도 θ와 같으므로 $l = R_A \sin(\theta) = R_B \tan(\theta)$ 이다. 즉,

$$R_A = \frac{l}{\sin(\theta)}, \qquad R_B = \frac{l}{\tan(\theta)} \quad \text{이다.}$$



(2) 아래 그림에서와 같이 O를 중심으로 회전하는 자동차의 안쪽 앞바퀴 A, 안쪽 뒷바퀴 B, 바깥쪽 앞바퀴 C, 바깥쪽 뒷바퀴 D의 회전 반지름을 각각 R_A, R_B, R_C, R_D 라 하자. 그림에서 $\theta_1 = \angle AOB$, $\theta_2 = \angle COD$ 라 하면, (1)에서와 같이

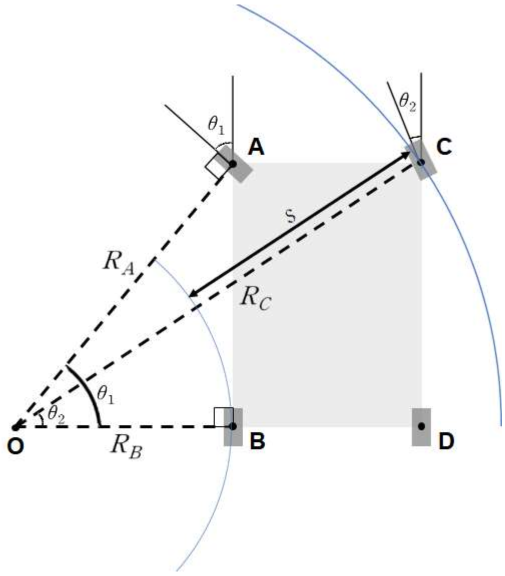
$$R_A = \frac{l}{\sin(\theta_1)},\ R_B = \frac{l}{\tan(\theta_1)},\ R_C = \frac{l}{\sin(\theta_2)},\ R_D = \frac{l}{\tan(\theta_2)} \quad \text{이다.}$$



$R_D = R_B + w$ 이므로 $R_B = \dfrac{l}{\tan(\theta_1)}$, $R_D = \dfrac{l}{\tan(\theta_2)}$을 대입하여 정리하면 아래 식을 얻는다.

$$\frac{1}{\tan(\theta_2)} = \frac{1}{\tan(\theta_1)} + \frac{w}{l}$$

(3) 다음 그림에서 표시된 s가 문제에서 묻는 길의 최소 폭이다.



이는 가장 작은 회전 반지름을 가지는 안쪽 뒷바퀴 B와 가장 큰 회전 반지름을 가지는 바깥쪽 앞바퀴 C의 회전 반지름의 차이이다. 즉, $s = R_C - R_B$ 이다. (1), (2)에서 구한 $R_B = \dfrac{l}{\tan(\theta_1)}$, $R_C = \dfrac{l}{\sin(\theta_2)}$, $\dfrac{1}{\tan(\theta_2)} = \dfrac{1}{\tan(\theta_1)} + \dfrac{w}{l}$ 를 대입하여 정리하면 아래 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} s &= R_C - R_B = \frac{l}{\sin(\theta_2)} - \frac{l}{\tan(\theta_1)} \\ &= \frac{l}{\sin(\theta_2)} - \frac{l}{\tan(\theta_2)} + w = \frac{l(1-\cos(\theta_2))}{\sin(\theta_2)} + w \end{aligned}$$