5 자연계열 논술고사 (오전)

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 미적분, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 조건부 확률, 수열의 극한
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

문제 1 (20점)

수직선 위에 점 A가 있고, 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$인 동전이 있다. 이 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오면 점 A를 $+1$ 만큼, 뒷면이 나오면 점 A를 -1 만큼 이동시키는 '시행'을 한다. 점 A의 시작 좌표는 1 또는 2 이다. 자연수 n을 '시행횟수'라 하고 위 '시행'을 n회 반복한다. 아래와 같이 '성공', '실패', '보류' 사건을 정의한다.

- 점 A가 좌표 0에 도달하기 전에 좌표 3에 먼저 도달하는 사건을 '성공'으로 정의한다.
- 점 A가 좌표 3에 도달하기 전에 좌표 0에 먼저 도달하는 사건을 '실패'라고 정의한다.
- 점 A가 n회의 '시행' 동안 좌표 0 또는 3에 도달하지 못한 사건을 '보류'라고 정의한다.

'시행횟수'가 n일 때, $x=1$ 또는 $x=2$에 대하여 점 A가 좌표 x에서 시작하여 '성공'할 확률을 $S(n,x)$, '보류'될 확률을 $D(n,x)$, '실패'할 확률을 $F(n,x)$라 하자.

(1) $D(3,1)$과 $D(4,2)$를 구하고, 모든 자연수 n에 대하여 $D(n,1)$과 $D(n,2)$를 각각 n에 대한 식으로 표현하시오.

(2) $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 점 A는 좌표 1에서 시작하면 첫 '시행' 후 $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 0으로 이동하여 '실패'하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 2로 이동한 후에 '시행'을 반복하게 된다. 이를 이용하여 $S(n,1)$을 $S(n-1,2)$에 대한 식으로 표현하시오.

(3) $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 문항 (2)와 유사한 방식으로 $S(n,2)$를 $S(n-1,1)$에 대한 식으로 표현하시오.

(4) 모든 자연수 n에 대하여 $S(n,2)=F(n,1)$가 성립함을 간단히 설명하고, 이 사실을 이용하여 $a_n = S(n,1)$과 $b_n = S(n,2)$에 대해 수열 $\{a_n + b_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$을 구하시오.

(5) 문항 (4)에서 정의한 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 극한이 모두 존재할 때, $\{a_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\{b_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$을 각각 구하시오.

3. 출제 의도

주어진 사건의 확률 및 조건부 확률을 계산할 수 있는지 평가한다. 해당 확률을 계산하여 얻어진 수열의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 주어진 사건의 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.

(2) 주어진 사건을 두 가지 경우로 나누어 각각의 확률을 조건부 확률을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 주어진 사건을 두 가지 경우로 나누어 각각의 확률을 조건부 확률을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(4) 확률의 총합이 1임을 이해하고 있는지 평가한다. 수열의 극한값을 계산할 수 있는지 평가한다.

(5) 두 수열의 합의 극한은 각 수열의 극한값의 합과 같음을 이해하고 있는지 평가한다. 주어진 수열을 상수배한 수열의 극한값은 해당 수열의 극한값의 상수배한 결과와 같음을 이해하고 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

구분		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.(97쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.(97쪽)
문항 (1)	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - $\boxed{1}$ 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.(65쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.(97쪽)
문항 (2)	1	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.(97쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
문항 (3)	1	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.(97쪽)
	3	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{2}$ 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)
문항 (4)	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)
	2	교육과정 성취기준	[확률과 통계] - (2) 확률 - $\boxed{1}$ 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(97쪽)

문항 (5)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - ① 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	고성은 외	좋은책신사고	2018	123-124
	수학 I	김원경 외	비상교육	2018	127-128
	확률과 통계	김원경 외	비상교육	2019	44-45, 53-60
	확률과 통계	고성은 외	좋은책신사고	2019	50-51, 58-66
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	16-17, 22-23
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	15-16, 19-20
	미적분	이준열 외	천재교육	2019	17-18, 22-23
	미적분	김원경 외	비상교육	2019	16-17, 20-21

5. 문항 해설

(1) 제시문에 주어진 '보류' 사건을 이해하고 동전의 앞뒤가 번갈아 나오는 경우에 해당함을 이용하여 '보류' 될 확률을 계산한다.

(2) 좌표 1에서 시작하여 성공하기 위해서는 첫 시행에서 동전의 앞면이 나와야만 한다. 첫 시행에서 동전의 앞면이 나왔을 때 성공할 확률을 조건부 확률을 이용하여 계산한다.

(3) 좌표 2에서 시작하여 성공하는 사건을 첫 시행에서 동전의 앞면이 나왔을 때 성공하는 사건과 첫 시행에서 동전의 뒷면이 나왔을 때 이후 시행을 반복하여 성공하는 사건으로 나눈다. 동전의 뒷면이 나왔을 때 이후 시행을 반복하여 성공할 확률을 조건부 확률을 이용하여 계산한다.

(4) 대칭성을 이용하여 $S(n,2)=F(n,1)$을 보인다. 확률의 총합이 1임을 이용하여 $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 를 보이고 극한값을 계산한다.

(5) $a_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$의 양변에 극한을 취하여 수열 $\{b_n\}$의 극한값이 수열 $\{a_n\}$의 극한값의 2배가 됨을 보인다. $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$의 극한값이 1이므로 이 두 가지 성질을 이용하여 각 수열의 극한값을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$D(3,1)$과 $D(4,2)$를 구함 (2점) $D(n,1)$과 $D(n,2)$를 구함 (2점)	4
(2)	$S(n,1)=\frac{1}{2}S(n-1,2)$를 올바르게 유도함 (4점)	4
(3)	$S(n,2)=\frac{1}{2}S(n-1,1)+\frac{1}{2}$을 올바르게 유도함 (4점)	4
(4)	$S(n,2)=F(n,1)$가 성립함을 설명함 (2점) $a_n+b_n=S(n,1)+S(n,2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 이용하여 극한값을 계산함 (2점)	4
(5)	두 수열의 극한값을 $a=\lim_{n\to\infty}a_n$과 $b=\lim_{n\to\infty}b_n$ $a+b=1$을 설명한 경우 (1점) $a+b=1$과 $b=\frac{1}{2}a$, $a=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}$중 두 개의 식을 연립하여 a와 b를 구한 경우 (3점)	4

7. 예시 답안

(1) 좌표 1에서 시작하여 3회의 시행 후 '보류'가 되는 경우는 3번의 동전을 던지는 '시행'에서 '앞뒤앞'이 나와야 한다. 이러한 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$이다. 마찬가지로 좌표 2에서 시작하여 4회의 시행 후 '보류'가 되는 경우는 4번의 동전을 던지는 '시행'에서 '뒤앞뒤앞'이 나와야 한다. 이러한 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4$이다.

좌표 1에서 시작하여 n회의 시행 후 '보류'가 되는 경우는 n회의 '시행'에서 '앞뒤앞...'이 연속으로 번갈아 나오는 경우뿐이다. 따라서 $D(n,1)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다. 마찬가지로 $D(n,2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

(2) 점 A가 좌표 1에서 출발하면 첫 '시행' 후 $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 0으로 이동하여 '실패'하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 2로 이동하여 '시행'을 반복하게 된다. 이때 좌표 2로 이동한 후 '성공'할 확률은 시작 좌표가 2이고 '시행횟수'가 $n-1$인 경우와 같으므로 $S(n-1,2)$이다. 따라서

$S(n, 1) = \frac{1}{2}S(n-1, 2)$이다.

(3) 점 A가 좌표 2에서 출발하면 첫 '시행' 후 $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 3으로 이동하여 '성공'하거나, $\frac{1}{2}$의 확률로 좌표 1로 이동하여 n-1회 '시행'을 반복하게 된다. 이때 좌표 1로 이동한 후 '성공' 할 확률은 시작좌표가 1이고 '시행횟수'가 $n-1$인 경우와 같으므로 $S(n-1, 1)$이다. 따라서 $S(n, 2) = \frac{1}{2}S(n-1, 1) + \frac{1}{2}$이다.

(4) 좌표 1에서 시작하여 '성공'하는 사건과 좌표 2에서 시작하여 '실패'하는 사건은 대칭이다. 따라서 $S(n, 2) = F(n, 1)$이다. 확률의 총합은 1이어야 하므로 $S(n, 1) + D(n, 1) + F(n, 1) = 1$이다. 이를 이용하여 $a_n + b_n = S(n, 1) + S(n, 2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$을 얻을 수 있다. 따라서 $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$이다.

(5) 두 수열의 극한값을 $a = \lim_{n \to \infty} a_n$과 $b = \lim_{n \to \infty} b_n$로 정의하자. 문항 (4)의 결과에 의해 $a + b = 1$이다. 문항 (2)에서 얻은 관계는 $a_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$와 같이 표현할 수 있다. 이 식의 양변에 극한을 취하면 $a = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}b_{n-1} = \frac{1}{2}b$이다. 따라서 $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$이다.

6 자연계열 논술고사 (오전)

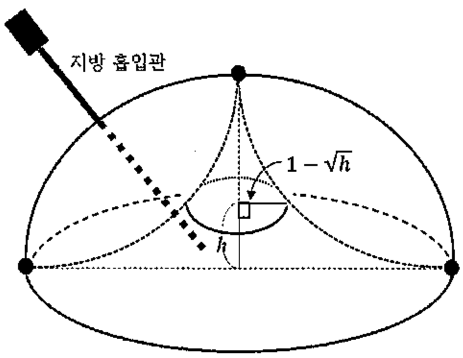
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	정적분, 속도와 거리, 접선의 방정식, 함수의 극대·극소, 함수의 최대·최소
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

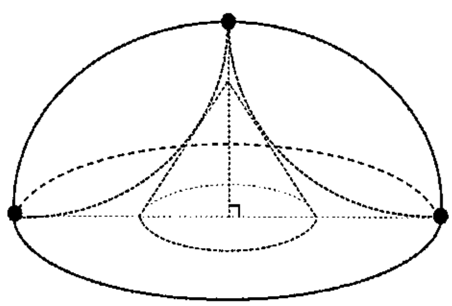
2. 문항 및 제시문

문제 2 (20점)

반지름이 1인 반구 모양의 인간 복부가 <그림 1>에 그려져 있다. 복부 내부에 지방이 있는 부분을 복부의 밑면으로부터 높이가 h인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면은 반지름이 $1-\sqrt{h}$인 원이며, 이 원은 같은 평면으로 자른 복부의 단면과 중심이 같다. 복부 내부의 지방을 흡입관 끝으로 훑으며 흡입해서 모두 제거한 후, <그림 2>와 같이 지방이 제거된 빈 공간에 원뿔 모양의 의료 보형물을 삽입한다. (단, $0 \le h \le 1$)



<그림 1>



<그림 2>

(1) <그림 1>에서 제거된 지방의 부피를 구하시오.

(2) 복부 위에서 바라보았을 때, 좌표평면 위를 흡입관 끝이 움직인다. 시각 t에서의 흡입관 끝의 위치 점 $\mathrm{P}(x,y)$가

$$x=e^{-t}\cos t,\ y=e^{-t}\sin t$$

일 때, 점 $\mathrm{P}(x,y)$가 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 움직인 거리를 구하시오.

(3) <그림 2>에서 삽입하는 의료 보형물인 원뿔의 중심축은 반구 밑면의 중심을 지나고 반구 밑면에 수직이다. 이때 삽입 가능한 의료 보형물의 최대 부피를 구하시오.

3. 출제 의도

미분과 적분을 이용하여 입체도형의 부피, 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리, 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 미분과 적분을 이용하여 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 원뿔의 부피를 적절한 함수로 나타내고, 미분을 이용하여 부피의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

		과목명	교육과정 및 성취기준
제시문	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.(88쪽)
문항 (1)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.(88쪽)
	2	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.(88쪽)
문항 (2)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.(75쪽)
	2	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. (86쪽)
	3	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.(86쪽)
	4	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.(86쪽)
	5	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{2}$ 여러 가지 미분법 [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.(86쪽)
	6	교육과정 성취기준	[미적분] - (3) 적분법 - $\boxed{2}$ 정적분의 활용 [12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.(88쪽)
문항 (3)		과목명	교육과정 및 성취기준
	1	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.(75쪽)
	2	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.(75쪽)
	3	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - $\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.(75쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	홍성복 외	지학사	2018	83-92
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	157-159
	미적분	고성은 외	좋은책신사고	2019	160-164
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	168-170
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	82-89
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	106-108
	미적분	황선욱 외	미래앤	2019	110-117

5. 문항 해설

(1) 주어진 입체도형을 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 알면 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있다. 문제에서 높이를 축으로 생각하면 단면은 반지름 $1-\sqrt{h}$인 원이다.

(2) 좌표평면 위에서 점이 움직인 거리를 구하는 식을 이용한다.

(3) 원뿔의 축을 포함하는 평면으로 주어진 입체도형을 자르면 원뿔의 모서리가 접하는 곡선의 식을 구할 수 있다. 이로부터 원뿔의 높이와 밑면의 반지름을 구하고 미분을 이용하여 부피의 최댓값을 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	부피를 정적분 식으로 나타냄 (2점) 정적분 과정을 보이고 부피를 최종적으로 구함 (2점)	4
(2)	x와 y의 도함수를 구함 (3점) 정적분을 통하여 거리를 구함 (4점)	7
(3)	밑면에 중심과 밑면에 수직인 평면으로 입체 도형을 자른 평면을 $-1 \leq x \leq 1$와 $-1 \leq y \leq 1$구간에서 좌표평면에 표현 (3점) 접선의 방정식을 세우고, 접점의 좌표를 이용하여 원뿔 부피를 함수로 표현 (3점) 합성함수의 미분과 함수의 최댓값 구하는 원리를 이용하여 부피가 최대가 되는 접점의 좌표를 구한 후 최대 부피값 구함 (3점)	9

7. 예시 답안

(1) 높이를 축으로 생각하면 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름 $1-\sqrt{h}$인 원이고 단면적은 $\pi(1-\sqrt{h})^2$이다. 다음과 같이 정적분을 이용하여 부피를 구한다.

$$\int_0^1 \pi(1-\sqrt{h})^2 dh$$
$$=\int_0^1 \pi(1-2\sqrt{h}+h)dh$$
$$=\pi\left[h-\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}h^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{6}\pi$$

(2) 점 P가 움직인 거리 l은 다음과 같다.

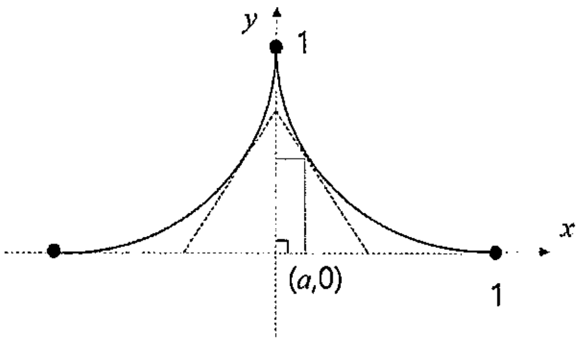
$$l=\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$$

이므로,

$$l=\int_0^\pi \sqrt{(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)^2+(-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi e^{-t}\sqrt{(\cos t+\sin t)^2+(-\sin t+\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^\pi e^{-t}\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$$
$$=\int_0^\pi e^{-t}\sqrt{2}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^\pi$$
$$=\sqrt{2}(1-e^{-\pi})$$

(3)



<그림 3>

밑면의 중심과 밑면에 수직으로 지나는 평면으로 <그림 2>의 복부를 잘랐을 때, 원뿔의 단면은 위의 그림과 같이 $y=(x-1)^2$와 $y=(x+1)^2$에 각각 접하는 2개의 직선들과 x축 상 $(-1,0)$과 $(1,0)$ 사이의 직선으로 이루어진 삼각형이다.

<그림 3>의 $x=a$ 에서 $y=(x-1)^2$에 접하는 접선의 기울기는 $2(a-1)$이며, 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=2(a-1)(x-a)+(a-1)^2$$

해당 직선이 x축과 y축과 만나는 점들은 각각 $\left(\frac{a+1}{2},0\right)$과 $(0,1-a^2)$이다.

즉, 원뿔 밑면의 반지름은 $\frac{a+1}{2}$이고, 원뿔의 높이는 $1-a^2$이다.

따라서 원뿔의 부피는 $V=\frac{1}{12}\pi(a+1)^2(1-a^2)$이다. 단, $0\le a\le 1$ 이다.

함수 V의 도함수 $\frac{dV}{da}=\frac{1}{6}\pi(a+1)(-2a^2-a+1)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 $\frac{dV}{da}=0$, $0<a<\frac{1}{2}$에서 $\frac{dV}{da}>0$, $\frac{1}{2}<a<1$에서 $\frac{dV}{da}<0$ 을 만족한다. 그래프의 개형으로부터 구간 [0,1]에서 함수 V는 $a=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{9}{64}\pi$을 취한다. 즉, 원뿔의 최대 부피는 $\frac{9}{64}\pi$ 이다.

7 자연계열 논술고사 (오전)

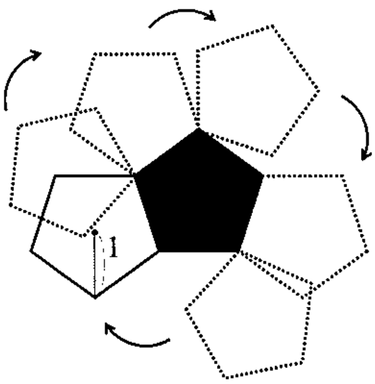
1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 ☐ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 수열의 극한, 함수의 극한
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

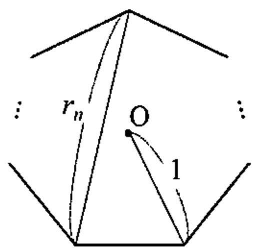
2. 문항 및 제시문

문제 3 (20점)

아래 <그림 1>과 같이 중심에서 꼭짓점까지의 거리가 1인 정n각형 두 개가 꼭짓점을 맞대며 한 변에서 서로 접하고 있다. 두 도형 중 하나의 '고정 도형'은 제 자리에 고정되어 있다. 나머지 하나의 '회전 도형'이 꼭짓점을 축으로 다음 변이 접할 때까지 회전하고, 이를 반복하여 '고정 도형'의 주위를 돌아 원래 자리까지 움직인다. (단, 정n각형의 중심은 외접원의 중심이다.)



<그림 1>



<그림 2>

(1) $n=3$일 때 '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 구하시오.

(2) n이 3 이상의 홀수일 때 <그림 2>와 같이 중심 O에서 꼭짓점까지의 거리가 1인 정n각형의 가장 먼 두 꼭짓점 사이의 거리를 r_n이라 하자. $r_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ 임을 보이시오.

(3) n이 3 이상의 홀수일 때 '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 S_n이라 하자. S_n의 식을 구하고, $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$의 값과 그 의미를 설명하시오. (단, k는 자연수이다.)

3. 출제 의도

간단한 평면도형과 삼각함수의 기본적인 성질을 이해하는지 평가한다. 이를 바탕으로 주어진 수학적 조건에서 변형되는 수열의 식을 수립하고 응용할 수 있는지 평가한다. 삼각함수로 이루어진 수열의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

(1) 간단한 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(2) 간단한 도형에서 각과 변의 길이 사이의 관계를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

(3) 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 삼각함수의 극한을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취 기준

<table>
<tr><td rowspan="2">제시문</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td>1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">문항 (1)</td><td></td><td>과목명</td><td>교육과정 및 성취기준</td></tr>
<tr><td>1</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
[12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>교육과정
성취기준</td><td>[수학 I] - (2) 삼각함수 - 1 삼각함수
[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(64쪽)</td></tr>
</table>

문항 (2)

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트 함수의 그래프를 그릴 수 있다.(64쪽)

문항 (3)

	과목명	교육과정 및 성취기준
1	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다.(64쪽)
2	교육과정 성취기준	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - $\boxed{1}$ 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.(64쪽)
3	교육과정 성취기준	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - $\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.(74쪽)
4	교육과정 성취기준	[미적분] - (1) 수열의 극한 - $\boxed{1}$ 수열의 극한 [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.(85쪽)
5	교육과정 성취기준	[미적분] - (2) 미분법 - $\boxed{1}$ 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. (86쪽)

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	홍성복 외	지학사	2018	68-111
	수학 Ⅰ	고성은 외	좋은책신사고	2018	65-109
	수학 Ⅱ	홍성복 외	지학사	2018	10-29
	미적분	김원경 외	비상교육	2018	11-26, 49-73
	미적분	황선욱 외	미래엔	2018	11-26, 53-77
	미적분	이준열 외	천재교육	2018	10-27, 54-80

5. 문항 해설

(1) 주어진 조건에 맞는 평면도형의 형태를 이해하고, 가장 간단한 정다각형인 정삼각형의 성질 및 부채꼴의 성질을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구한다.

(2) 삼각함수를 이용하여 이등변삼각형의 각과 변의 길이 사이의 관계를 구한다.

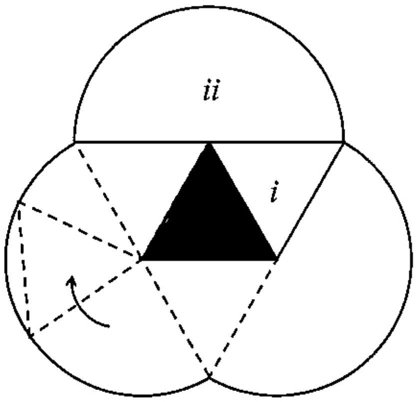
(3) 부채꼴 및 이등변삼각형의 넓이를 원주각과 삼각함수를 이용하여 구한다. 삼각함수의 극한값을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	'회전 도형'이 훑고 지나간 도형의 형태를 구하고 과정을 설명함 (2점) '회전 도형'이 훑고 지나간 면적을 구함 (2점)	4
(2)	중심과 두 연이은 꼭지점이 이루는 각이 $2\pi/n$ 임을 설명함 (2점) r_n을 포함하는 이등변삼각형을 나타냄 (2점) $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)=r_n/2$ 임을 이용하여 r_n의 값을 구함 (2점)	6
(3)	r_n을 변으로 갖는 이등변삼각형과 r_n을 반지름으로 갖는 부채꼴로 이루어짐을 설명함 (2점) 이등변삼각형과 부채꼴 각각의 면적을 구함 (3점) S_n의 식과 $\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$의 극한값을 구함 (3점) 극한을 취할 시 정다각형의 형태가 원이 되는 것을 설명함 (2점)	10

7. 예시 답안

(1) 정삼각형이 차지하는 (i) 영역과, 꼭짓점의 궤적에 포함되는 (ii) 영역의 합으로 나누어 생각할 수 있다.

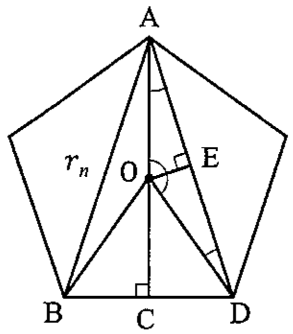


(i) 영역: 정삼각형 3개, 한 변의 길이 $\sqrt{3}$: 총 넓이 $3\times(\frac{3\sqrt{3}}{4})$

(ii) 영역: 부채꼴 3개, 반지름 $\sqrt{3}$, 중심각 π: 총 넓이 $3\times(3\pi/2)$

총 넓이 $\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{9\pi}{2}$

(2) 정n각형의 중심을 O라고 한다 (예시 그림: $n=5$인 경우)



이등변삼각형 OBD에서 $\angle BOD = 2\pi/n$ 이므로,

$\angle COD = 1/2 \times \angle BOD = \pi/n$

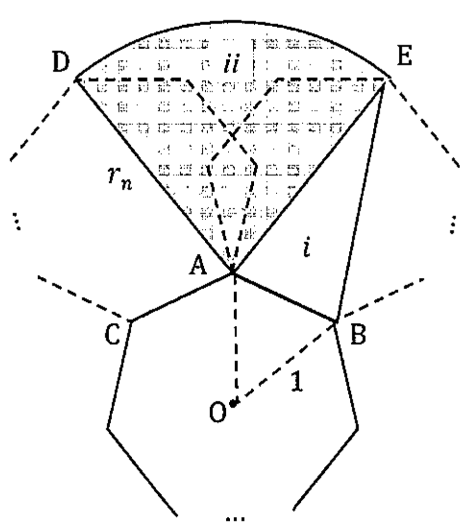
$\angle AOD = \pi - \angle COD = \dfrac{n-1}{n}\pi$ 이므로,

이등변삼각형 AOD에서 $\angle OAD = \angle ODA = \left(\pi - \dfrac{n-1}{n}\pi\right)/2 = \dfrac{\pi}{2n}$

$\cos(\angle ODA) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = \dfrac{\overline{DE}}{1} = r_n/2$

$r_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

(3) n개의 (i) 영역 및 (ii) 영역의 합으로 생각할 수 있다. 이때 (i)은 정n각형의 한 변과 두 개의 가장 먼 두 꼭짓점 사이를 잇는 선분으로 이루어진 이등변삼각형이고, (ii)는 r_n을 반지름으로 갖는 부채꼴이다.



$\angle CAB$는 정n각형의 내각이므로 $\angle CAB = \pi\left(\dfrac{n-2}{n}\right)$

이등변삼각형 ABE에 대하여 위 문제에서 $\frac{\angle AEB}{2}=\frac{\pi}{2n}$ 이므로 $\angle EAB=\frac{\pi}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)$

점 A 주위로 $2\pi=\angle DAE+2\angle EAB+\angle CAB$ 이므로 $\angle DAE=3\pi/n$

위 문제에서 주어진 것과 같이 $r_n=2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

(i) 이등변삼각형 n개, 긴 변 $r_n=2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, 사이각 π/n:

총 넓이 $n\times\left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\times\frac{\sin(\pi/n)}{2}$

(ii) 부채꼴 n개, 반지름 $r_n=2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, 중심각 $3\pi/n$:

총 넓이 $n\times\left(2\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2\times\frac{3\pi}{2n}$

$S_n=4\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\times\left(\frac{n\sin(\pi/n)}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)$

$S_{2k+1}=4\cos^2\left(\frac{\pi}{2(2k+1)}\right)\times\left(\frac{(2k+1)\sin(\pi/(2k+1))}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)$

$\lim_{k\to\infty}S_{2k+1}=8\pi$

극한을 취하면 반지름 1인 원 '회전도형'이 반지름 1인 원 '고정도형'의 둘레에 접하며 움직이는 것과 같다 (아래 그림과 같이 반지름 3인 원의 중심에 반지름 1인 구멍이 뚫린 영역)