2025학년도 수시모집 논술고사
문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 1]

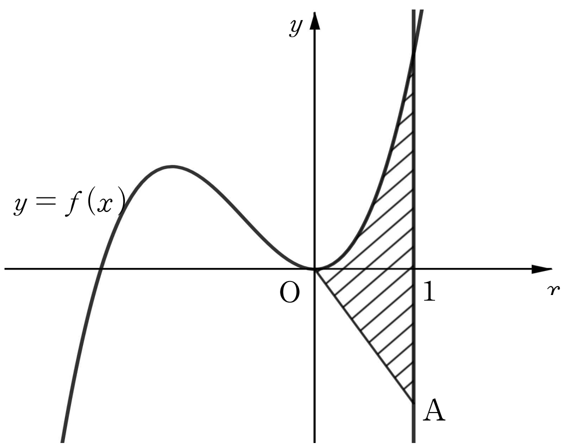
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항 번호 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 II
	핵심개념 및 용어	이차방정식과 이차함수와의 관계, 여러 가지 부등식, 함수의 극한, 접선의 방정식, 평균값 정리, 함수의 극대와 극소, 정적분, 정적분의 활용
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

[문1]

점 $\mathrm{A}(1, m)$에서 곡선 $f(x) = x^3 + 3kx^2$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 없다고 하자. 아래 그림의 빗금친 부분은 선분 OA와 곡선 $y = f(x)$ 및 $x = 1$로 둘러싸여 있다. (단, O는 원점이고, k는 양수이고, m은 음수이다.)



<평균값 정리>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

[문제 1-1]

곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있는 점을 $(1, d)$라 할 때, d의 범위를 구하시오.

[30점]

[문제 1-2]

m의 최댓값을 $L(k)$라 하자. m이 $L(k)$일 때, 그림의 빗금친 부분의 넓이를 $S(k)$라 하자. $S(k)$와 $\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{L(k)}$를 구하시오.

[30점]

[문제 1-3]

함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값이 1일 때, 이차함수 $g(x)=x^2+px+q$ (p, q는 실수)와 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. 이때, p의 최댓값과 q의 값을 구하시오.

(가) 함수 $h(x)$가 극값을 <u>갖지 않는다</u>.

(나) $-1\le x\le 1$일 때, $\int_{-1}^{1}|x-t|\,qt^2\,dt$의 최고차항의 계수가 1이다.

[40점]

3. 출제 의도

[문제 1-1] 외부의 점에서 다항함수에 접하는 접선을 구할 수 있는지 알아본다.
도함수를 이용하여 접점의 수를 구할 수 있는지 알아본다.
주어진 조건을 이용한 부등식을 풀 수 있는지 알아본다.

[문제 1-2] 접선의 수에 대한 조건으로 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.
정적분으로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.
함수의 극한값을 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 1-3] 평균값 정리를 활용할 수 있는지 알아본다.
함수의 극값과 도함수의 관계를 알고 있는지 알아본다
정적분을 활용한 문제를 해결할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
1	1-1	**[수학]-(1)문자와 식-**$\boxed{6}$ 여러 가지 방정식과 부등식 [10수학01-15] 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. **[수학II]-(2)미분-**$\boxed{2}$ 도함수 [12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학II]-(2)미분-**$\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	1-2	**[수학]-(2)기하-**$\boxed{2}$ 직선의 방정식 [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학II]-(1)함수의 극한과 연속-**$\boxed{1}$ 함수의 극한 [12수학Ⅱ01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. **[수학II]-(3)적분-**$\boxed{2}$ 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	1-3	**[수학]-(1)문자와 식-**$\boxed{5}$ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-09] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다. **[수학II]-(2)미분-**$\boxed{3}$ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수

		있다. [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. **[수학Ⅱ]-(3)적분-**② 정적분 [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
교과서	수학	홍성복 외 10인	㈜지학사	2020	66~69, 80~107		
	수학 II	홍성복 외 10인	㈜지학사	2020	10~29, 74~89, 124~158		
	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2020	10~29, 70~85, 112~142		
EBS 교재	수능특강 수학 II	권백일 외 2인	EBS	2024	4~17, 44~57, 72~102		`

5. 문항 해설

[문제 1-1]
- 주어진 점에서 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구한다.
- 곡선 위의 접점을 구한다.
- 서로 다른 세 접점이 나올 수 있는 조건을 찾는다.

[문제 1-2]
- 서로 다른 세 접점이 나오지 않는 조건을 만족하는 최댓값을 찾는다.
- 구한 직선과 주어진 함수로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 계산한다.
- 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

[문제 1-3]
- 평균값 정리로 함수를 구한다.
- 도함수의 성질을 이용하여 극값이 없는 조건을 구한다.
- 절댓값의 성질을 이용하여 정적분을 구한다.

6. 채점 기준

[문제 1-1]

- (1)과 같이 접선의 방정식을 구하면 +6점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(3점): (1)을 정확히 구하지 못한다.
  - A(6점): (1)을 정확하게 구한다.
- (2) 혹은 (2-1)과 같이 접점을 구할 수 있는 방정식을 구하면 +4점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(4점): (2) 혹은 (2-1)을 정확하게 구한다.
- (3)과 같이 접점을 구하면 +3점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(3점): (3)을 정확하게 구한다.
- (4) 혹은 (4-1)과 같이 서로 다른 세 실근을 얻을 수 있는 조건을 서술하면 +7점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(7점): (4) 혹은 (4-1)의 의미를 알고 정확하게 구한다.
- (5) 혹은 (5-1)과 같이 서로 다른 세 실근을 얻을 수 있는 부등식을 구하면 +5점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(5점): (5)를 정확하게 구한다.
- (6)과 같이 부등식의 결과를 구하면 +5점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(2점): k가 양수임을 모르고 정확히 구하지 못한다.
  - A(5점): (6)을 정확하게 구한다.

[문제 1-2]

- (7)과 같이 m의 범위를 구하면 +8점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(8점): (7)을 정확하게 구한다.
- (8)과 같이 m의 최댓값을 구하면 +4점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(4점): (8)을 정확하게 구한다.
- (9)의 일차함수나 (9-1)의 삼각형의 넓이를 구하면 +6점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(6점): (9)나 (9-1)을 정확하게 구한다.
- (10) 혹은 (10-1)과 같이 정적분을 구하면 +7점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(3점): (10) 혹은 (10-1)을 정확하게 구하지 못한다.

   - A(7점): (10) 혹은 (10-1)을 정확하게 구한다.
- (11)과 같이 함수의 극한을 구하면 +5점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(5점): (11)을 정확하게 구한다.

[문제 1-3]
- (12)와 같이 평균값 정리를 서술하면 +6점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(6점): (12)를 정확하게 구한다.
- (13)과 같이 찾은 k로 $h(x)$를 서술하면 +3점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(3점): (13)을 정확하게 구한다.
- (14)와 같이 극값을 가지지 않을 조건을 서술하면 +6점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(6점): (14)를 정확하게 구한다.
- (15)와 같이 판별식을 서술하면 +3점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(3점): (15)를 정확하게 구한다.
- (16)과 같이 p의 최댓값을 구하면 +2점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(2점): (16)을 정확하게 구한다.
- (17) 같이 절대값을 포함하는 함수를 서술하면 +5점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(5점): (17)을 정확히 서술한다.
- (18) 같이 정적분을 두 부분으로 나누어 서술하면 +5점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(5점): (18)을 정확히 서술한다.
- (17)을 서술하지 않고 (18)과 같이 정적분을 두 부분으로 나누어 서술하면 +10점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(10점): (17)을 서술하지 않았지만, (18)과 같이 정적분을 두 부분으로 나눈 적절한 설명과 함께 정적분을 두 부분으로 나누어 정확히 표현한다.
- (19)와 같이 정적분을 구하면 +8점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(8점): (19)를 정확하게 구한다.
- (20)과 q를 구하면 +2점
   - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
   - A(2점): (20)을 정확하게 구한다.

7. 예시 답안

[문제 1-1]

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=3x^2+6kx$이고 점 $(1,d)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t,f(t))$라 하면 $x=t$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+6kt$이고 $f(t)=t^3+3kt^2$이므로 점 $(1,d)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & y-f(t)=f'(t)(x-t) \\ \Rightarrow & y=f'(t)(x-t)+f(t) \\ & \quad =(3t^2+6kt)(x-t)+(t^3+3kt^2) \\ & \quad =(3t^2+6kt)x-3t^3-6kt^2+t^3+3kt^2 \\ & \quad =(3t^2+6kt)x-2t^3-3kt^2 \end{aligned} \tag{1}$$

한편, 접선 (1)은 점 $(1,d)$를 지나므로 (1)에 점 $(1,d)$를 대입하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} & d=(3t^2+6kt)-2t^3-3kt^2 \\ \Rightarrow & 2t^3+3(k-1)t^2-6kt+d=0 \end{aligned} \tag{2}$$

함수 $l(t)=2t^3+3(k-1)t^2-6kt+d$라 두고 $l'(t)=0$의 근을 구하면

$$\begin{aligned} & l'(t)=6t^2+6(k-1)t-6k=0 \\ \Rightarrow & t^2+(k-1)t-k=0 \\ \Rightarrow & (t-1)(t+k)=0 \end{aligned}$$

이므로 근은 다음과 같다.

$$t=1,\ -k \tag{3}$$

따라서, $l(t)$는 $t=1,\ -k$에서 극값을 가진다. 점 $(1,d)$에서 곡선 $f(x)$에 세 접선을 그을 수 있으려면 $l(t)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 다음과 같이 두 극값의 곱이 음수이어야 한다.

$$l(1)l(-k)<0 \tag{4}$$

그러므로

$$\begin{aligned} & l(1)l(-k)<0 \\ \Rightarrow & \{2+3(k-1)-6k+d\}\{-2k^3+3(k-1)k^2+6k^2+d\}<0 \\ \Rightarrow & (-1-3k+d)(-2k^3+3k^3-3k^2+6k^2+d)<0 \\ \Rightarrow & (-1-3k+d)(k^3+3k^2+d)<0 \end{aligned} \tag{5}$$

가 된다. k는 양수이므로 $1+3k>-k^3-3k^2$이다. 따라서 식 (5)를 만족하는 d의 범위는 다음과 같다.

$$-k^3-3k^2<d<1+3k \tag{6}$$

(2)의 별해

한편, 접선 (1)은 점 $(1,d)$를 지나므로 (1)에 점 $(1,d)$를 대입하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} d &= (3t^2+6kt)-2t^3-3kt^2 \\ &\Rightarrow 2t^3+3(k-1)t^2-6kt=-d \end{aligned} \tag{2-1}$$

함수 $l(t)=2t^3+3(k-1)t^2-6kt$라 두고

(4)와 (5)의 별해

따라서, $l(t)$는 $t=1$, $-k$에서 극값을 가진다. 삼차함수 $l(t)$의 최고차항의 계수가 2이고 k가 양수이므로 $t=-k$에서 극댓값을 가지고 $t=1$에서 극솟값을 가진다. 그러므로 식 (2−1)의 $l(t)$와 $-d$가 다음의 관계를 만족하면 $l(t)+d=0$는 서로 다른 세 실근을 가진다.

$$l(1)<-d<l(-k) \Rightarrow -l(-k)<d<-l(1) \tag{4-1}$$

한편,

$$\begin{aligned} &l(1)=2+3(k-1)-6k=-1-3k \\ &l(-k)=-2k^3+3(k-1)k^2+6k^2=k^3+3k^2 \end{aligned} \tag{5-1}$$

이고 k는 양수이므로 $1+3k>-k^3-3k^2$이다.

[문제 1−2]

식 (6)은 점 $(1,d)$에서 곡선 $f(x)$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있는 d의 범위이다. 그러므로 서로 다른 세 접선을 그을 수 없는 점 $\mathrm{A}(1,\mathrm{m})$의 m의 범위는 다음과 같다.

$$m \le -k^3-3k^2,\ m \ge 1+3k \tag{7}$$

m은 음수이고 k는 양수이므로 조건을 만족하는 m의 범위는 다음이 된다.

$$m \le -k^3-3k^2 \tag{8}$$

따라서, m의 최댓값은 $-k^3-3k^2$이다. 그러므로 m의 최댓값 $L(k)$는

$$L(k)=-k^3-3k^2$$

이다. 구해진 $L(k)$를 이용하면 원점 O와 점 $\mathrm{A}(1,-k^2-3k^2)$를 지나는 일차함수 $r(x)$는 다음과 같다.

$$r(x)=(-k^3-3k^2)x \tag{9}$$

그러므로 $S(k)$를 구하면

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^1 \{f(x) - r(x)\}\,dx \\ &= \int_0^1 \left\{x^3 + 3kx^2 - (-k^3 - 3k^2)x\right\}dx \\ &= \int_0^1 \left\{x^3 + 3kx^2 + (k^3 + 3k^2)x\right\}dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + kx^3 + \frac{k^3 + 3k^2}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + k + \frac{k^3 + 3k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{2}k^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{10}$$

이 된다. 따라서

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{L(k)} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{2}k^2 + k + \frac{1}{4}}{-k^3 - 3k^2} = -\frac{1}{2} \tag{11}$$

(9)와 (10)의 별해

원점 O와 점 A$(1, m)$ 및 점 $(1, 0)$이 만드는 삼각형의 면적은 $m = -k^3 - 3k^2$이므로

$$\frac{1}{2}(k^3 + 3k^2) \tag{9-1}$$

이 된다. 그러므로 $S(k)$를 구하면

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2}(k^3 + 3k^2) \\ &= \int_0^1 (x^3 + 3kx^2)\,dx + \frac{1}{2}(k^3 + 3k^2) \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + kx^3\right]_0^1 + \frac{1}{2}(k^3 + 3k^2) \\ &= \frac{1}{4} + k + \frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{2}k^2 \\ &= \frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{2}k^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{10-1}$$

[문제 1-3]

닫힌구간 $[-3, 3]$에서 평균값 정리 (나)를 만족하는 실수 c의 값은 1이므로

$$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{27+27k-(-27+27k)}{6}=f'(1) \tag{12}$$

이 성립한다. $f'(1)=3+6k$ 이므로 식 (12)에 대입하면

$$\frac{54}{6}=3+6k \Rightarrow 6k+3=9 \Rightarrow k=1$$

이 된다. 그러므로 $f(x)=x^3+3x^2$이고 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x)-g(x) \\ &= x^3+3x^2-x^2-px-q \\ &= x^3+2x^2-px-q \end{aligned} \tag{13}$$

최고차항의 계수가 1인 함수 $h(x)$가 극값을 가지지 않기 위해서는 모든 실수 x에 대하여

$$h'(x)=3x^2+4x-p \geq 0 \tag{14}$$

이다. 따라서 $h'(x)=0$가 서로 다른 실근을 가지지 않으면 되므로 $h'(x)=0$의 판별식은 다음을 만족한다.

$$\frac{D}{4}=4+3p \leq 0 \;\Rightarrow\; p \leq -\frac{4}{3} \tag{15}$$

가 된다. 따라서 p의 최댓값은 $-\frac{4}{3}$가 된다. (16)

한편, $-1 \leq x \leq 1$일 때, $-1 \leq t \leq 1$에서

$$t \leq x \text{이면 } |x-t|=x-t$$

이고

$$t > x \text{이면 } |x-t|=t-x$$

이다. 즉,

$$|x-t|=\begin{cases} x-t & (-1 \leq t \leq x) \\ t-x & (x < t \leq 1) \end{cases} \tag{17}$$

그러므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}|x-t|qt^2dt &= q\left\{\int_{-1}^{x}(x-t)t^2dt+\int_{x}^{1}(t-x)t^2dt\right\} \qquad (18) \\ &= q\left\{\int_{-1}^{x}(xt^2-t^3)dt+\int_{x}^{1}(t^3-xt^2)dt\right\} \\ &= q\left\{\left[\frac{xt^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{x}+\left[\frac{t^4}{4}-\frac{xt^3}{3}\right]_{x}^{1}\right\} \\ &= q\left\{\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{4}\right)-\left(-\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{3}\right)-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{3}\right)\right\} \\ &= q\left(\frac{x^4}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{q}{6}x^4+\frac{q}{2} \qquad (19) \end{aligned}$$

가 된다. 식 (19)의 최고차항은 $\frac{q}{6}x^4$이고 최고차항의 계수가 1이 되게 하는 q의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{q}{6}=1 \ \Rightarrow \ q=6 \tag{20}$$

[덕성여자대학교 문항정보 2]

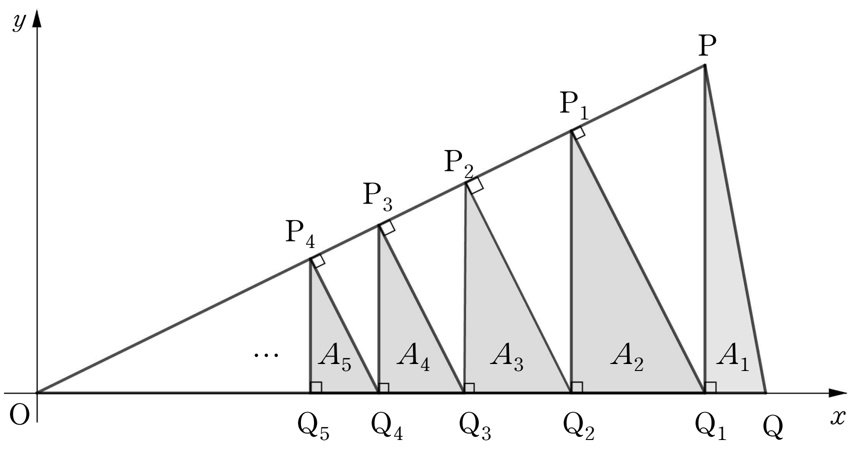
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 두 직선의 평행과 수직, 수열, 등비수열, 수학적 귀납법, 수열의 합, 지수함수의 활용
예상 소요 시간	총 90분 중 45분 소요 예상	

2. 문항 및 제시문

[문2]

세 꼭짓점이 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(2,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{24}{11},\ 0\right)$인 삼각형 POQ가 있다. 점 P에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 P_1이라 하자. 아래 그림과 같이 이 과정을 반복하여 선분 OP 위의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 와 선분 OQ 위의 점 Q_1, Q_2, Q_3, $\cdots$ 를 잡자. 이때 삼각형 $\mathrm{PQ}_1\mathrm{Q}$의 넓이를 A_1, 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1$의 넓이를 A_2, 삼각형 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_2$의 넓이를 A_3, $\cdots$ 라고 하자.



[문제 2-1]
두 점 P_1과 Q_1을 지나는 직선의 방정식을 구하고, 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1$의 넓이 A_2를 구하시오.

[20점]

[문제 2-2]
모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 할 때, x_n을 구하고, 구한 식을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

[50점]

[문제 2-3]
$k \geq 2$인 자연수 k에 대하여 삼각형 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k-1}$의 넓이 A_k를 구하고, $A_1 + \sum_{i=2}^{n} A_i > \frac{5}{11}$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[30점]

3. 출제 의도

[문제 2-1] 주어진 직선과 수직인 직선을 구할 수 있는지 알아본다.
두 직선의 교점을 구할 수 있는지 알아본다.
삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-2] 등비수열의 일반항을 구할 수 있는지 알아본다.
같은 과정을 반복하여 일반항 x_n을 유추할 수 있는지 알아본다.
수학적 귀납법을 사용하여 귀납적 단계를 적용할 수 있는지 알아본다.

[문제 2-3] 지수에 미지수를 포함하는 부등식을 풀 수 있는지 알아본다.
처음 몇 개의 값을 대입하여 근사값을 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
2	2-1	**[수학]-(2)도형의 방정식-③ 직선의 방정식** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. **[수학]-(2)도형의 방정식-③ 두 직선의 평행과 수직** [10수학02-04] 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
	2-2	**[수학 I]-(3)수열-① 수열** [12수학 I 03-01] 수열의 뜻을 안다. **[수학 I]-(3)수열-③ 등비수열** [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학 I]-(3)수열-② 수학적 귀납법** [12수학 I 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
	2-3	**[수학 I]-(3)수열-② 여러 가지 수열의 합** [12수학 I 03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. **[수학 I]-(1)지수함수와 로그함수-③ 지수함수와 로그함수의 활용** [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	121~126, 127~135		
	수학 I	고성은 외 6인	좋은책 신사고	2018	46~51, 123~127, 136~138, 144~145, 146~148,		

5. 문항 해설

[문제2-1]

- 주어진 직선과 수직인 직선을 구할 수 있는지 알아본다.
- 두 직선의 교점을 구할 수 있는지 알아본다.
- 주어진 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

[문제2-2]

- 같은 과정을 반복하여 일반항 x_n을 유추할 수 있는지 알아본다.
- 수학적 귀납법을 사용하여 유추한 x_n이 성립함을 증명할 수 있는지 알아본다.

[문제2-3]

- 지수에 미지수를 포함하는 부등식을 풀 수 있는지 알아본다.
- 처음 몇 개의 값을 대입하여 원하는 결과를 구할 수 있는지 알아본다.

6. 채점 기준

[문제2-1]

- 수선을 구하면 +6점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(1점): 직선 OP의 기울기를 알았다.
  - C(3점): 직선 P_1Q_1의 기울기나 지나는 점을 알았다.
  - B(5점): 직선 P_1Q_1의 기울기와 지나는 점을 알았다.
  - A(6점): 직선 P_1Q_1의 식을 완전히 구했다.
- 두 직선의 교점을 구하면 +8점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(2점): 직선 OP의 식을 알았다.
  - C(4점): 교점을 구하는 식을 알았다.
  - B(6점): 이 방정식을 풀어 교점 P_1을 구하려고 하였으나 완전하지 않았다.
  - A(8점): 교점 P_1을 완전히 구했다.
- 삼각형의 넓이를 구하면 +6점
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(1점): 직각 삼각형의 밑변이나 높이를 알았다.
  - C(3점): 직각 삼각형의 밑변과 높이를 알았다.
  - B(4점): 삼각형의 넓이를 구하려고 하였으나 완전하지 않았다.
  - A(6점): 삼각형의 넓이를 완전히 구했다.

[문제2-2]

- **점 P_2를 구하면 +9점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(2점): 직선 $\mathrm{P_2Q_2}$의 식을 구했다.
  - C(4점): 교점을 구하는 식을 알았다.
  - B(6점): 이 방정식을 풀어 교점 $\mathrm{P_2}$ 을 구하려고 하였으나 완전하지 않았다.
  - A(9점): 교점 $\mathrm{P_2}$을 완전히 구했다.
- **x_k 가 등비수열임을 유추하면 +6점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(4점): x_1, x_2를 이용하여 공비를 구하려고 노력하였다.
  - A(6점): x_k는 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열임을 유추하였다.
- **x_k 구하면 +4점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(2점): 일반항 x_n을 구하려고 노력하였다.
  - A(4점): 일반항 $x_n = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$을 구하였다.
- **수학적 귀납법의 초기 단계를 보이면 +11점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(7점): 수학적 귀납법을 사용하기 시작하였다.
  - A(11점): 초기 조건 (i)을 완전히 보였다.
- **수학적 귀납법의 귀납적 단계를 보이면 +20점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - D(6점): 귀납적 단계 (ii)에서 무엇을 보여야 하는지 알았다.
  - C(11점): $\mathrm{P}_{k+1}, \mathrm{Q}_{k+1}$을 지나는 직선의 식을 구하였다.
  - B(16점): $\mathrm{P}_{k+1}, \mathrm{Q}_{k+1}$을 지나는 직선과 직선 OP가 만나는 점을 구하였다.
  - A(20점): 귀납적 단계 (ii)를 완전히 보였다.

[문제2-3]

- A_1 **을 구하면 +3점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - A(3점): 삼각형 $\mathrm{PQ_1Q}$의 넓이 $\mathrm{A_1}$을 구했다.
- $k \geq 2$ **일 때** A_k**를 구하면 +7점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(3점): $\mathrm{A_k}$를구하려고 시도하였다.
  - B(5점): $\mathrm{A_k}$를구하는데 계산 오류가 있었다.
  - A(7점): $\mathrm{A_k}$를 정확히 구했다.
- $\sum_{k=1}^{n} A_k$**을 구하면 +8점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - C(3점): $\sum_{k=1}^{n} A_k$을 구하려고 시도하였다.
  - B(6점): $\sum_{k=1}^{n} A_k$을 구하는데 계산 오류가 있었다.
  - A(8점): $\sum_{k=1}^{n} A_k$ 완전히 구했다.
- **부등 방정식** $\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1} < \frac{2}{11}$**에 도달하면 +4점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(2점): 부등식을 간단히 하는데 오류가 있었다.
  - A(4점): 부등식에 도달했다.
- $n = 5$ **인 결론에 도달하면 +8점**
  - E(0점): 문제의 의미를 알지 못한다.
  - B(5점): $n = 2, 3, 4, 5$일 때 $\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1}$의 근사값을 구하려고 하였다.
  - A(8점): 결론에 완전히 도달했다.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

$P=(2,1)$이므로 $Q_1=(2,0)$이다. 직선 OP의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 P_1Q_1은 기울기가 -2이고 $(2,0)$을 지난다. 따라서 $y=-2(x-2)$. 즉

$$y=-2x+4 \tag{1}$$

이다.

직선 OP의 식은 $y=\frac{1}{2}x$이다. 이 두 직선의 교점은 $-2x+4=\frac{1}{2}x$이다. 따라서

$$x=\frac{8}{5},\ y=\frac{4}{5} \tag{2}$$

이다. 즉 $P_1=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$이고, $Q_{2=}\left(\frac{8}{5},0\right)$이다.

삼각형 $P_1Q_2Q_1$의 넓이 A_2는

$$A_2=\frac{1}{2}\times\overline{P_1Q_2}\times\overline{Q_2Q_1}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\left(2-\frac{8}{5}\right)=\frac{4}{25} \tag{3}$$

이다.

[문제 2-2]

직선 OP에 수직인 직선 P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4, $\cdots$의 기울기도 -2이다. $Q_2=\left(\frac{8}{5},0\right)$이므로 직선 P_2Q_2의 식은 $y=-2\left(x-\frac{8}{5}\right)$이다. 즉,

$$y=-2x+\frac{16}{5} \tag{4}$$

이다.

이 직선이 직선 OP와 만나는 점은 $-2x+\frac{16}{5}=\frac{1}{2}x$이다. 따라서 $x=\frac{32}{25}$, $y=\frac{16}{25}$이다. 즉

$$P_2=\left(\frac{32}{25},\frac{16}{25}\right),\ Q_{3=}\left(\frac{32}{25},0\right) \tag{5}$$

이다.

$x_1=\frac{8}{5}$, $x_2=\frac{32}{25}$이므로 x_k는 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열임을 유추할 수 있다. 즉 $n\ge 1$일 때

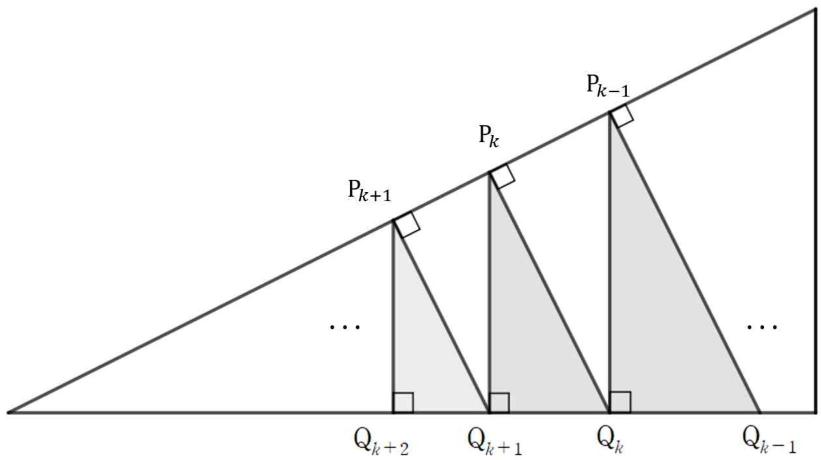
$$x_n = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \tag{6}$$

이다.

이제 수학적 귀납법을 이용하여 이 사실을 증명하자.

(i) $k=1$일 때 $x_1 = \frac{8}{5}$임을 (1)에서 보였다.

(ii) $k \geq 2$일 때, $x_k = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$ 이라고 하고 $x_{k+1} = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k}$임을 보이자.



$Q_{k+1} = \left(\frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}, 0\right)$이므로

P_{k+1}, Q_{k+1}을 지나는 직선의 식은 $y = -2\left\{x - \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right\}$이다. 즉,

$$y = -2x + 2 \times \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \tag{7}$$

이다.

이 직선과 $y = \frac{1}{2}x$가 만나는 점은 $-2x + 2 \times \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}x$이다. 따라서 $\frac{5}{2}x = 2 \times \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$이고

$$x = \frac{8}{5} \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k} \tag{8}$$

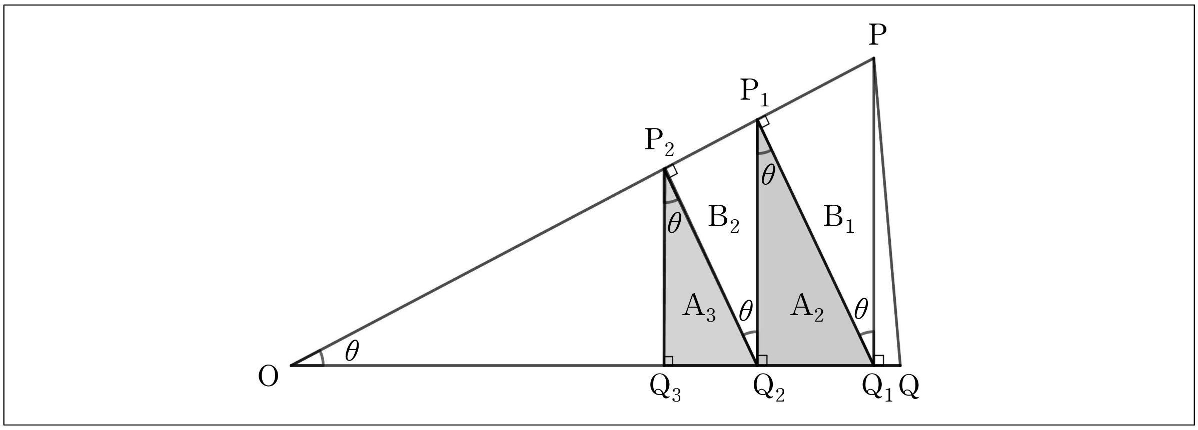
이다. 즉

$$x_n = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{k} \tag{9}$$

이다.

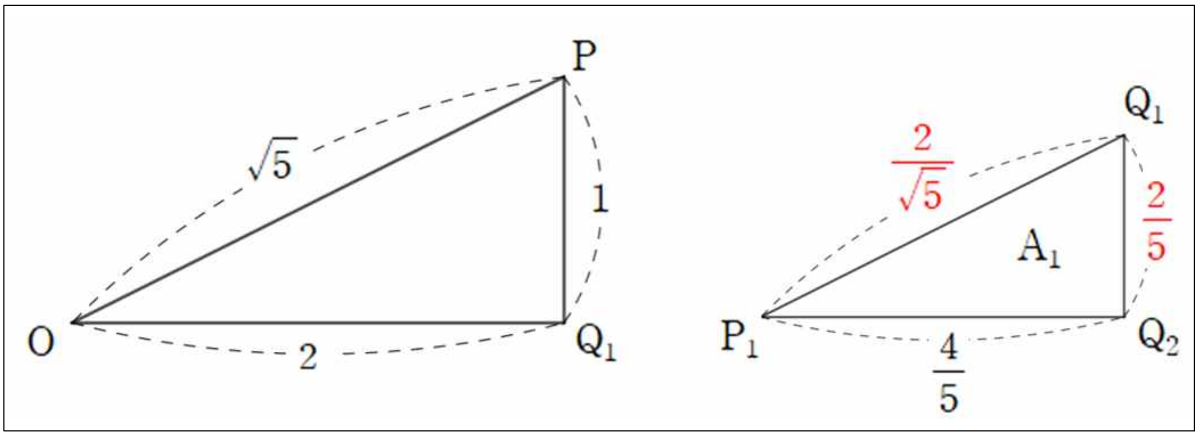
그러므로, (ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $x_n = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$이 성립한다.

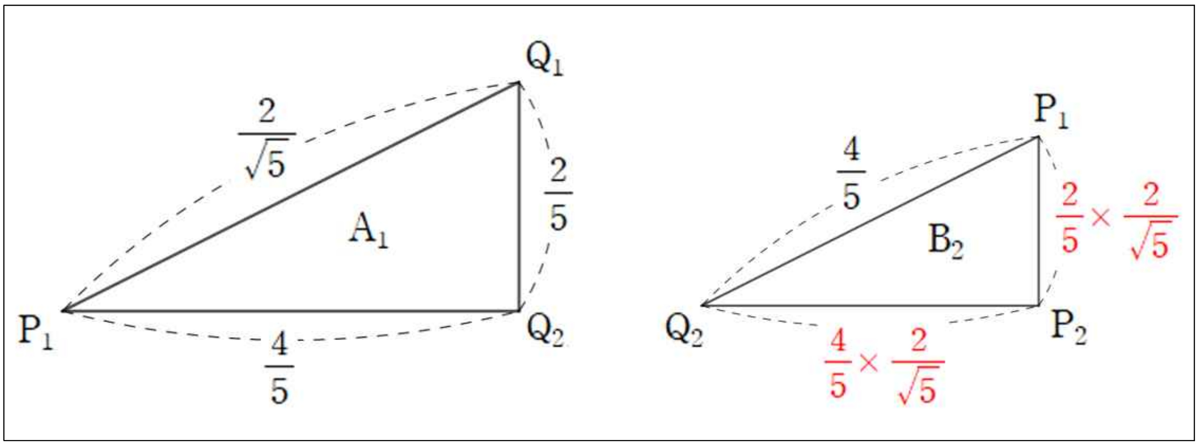
[문제 2-2]의 별해1

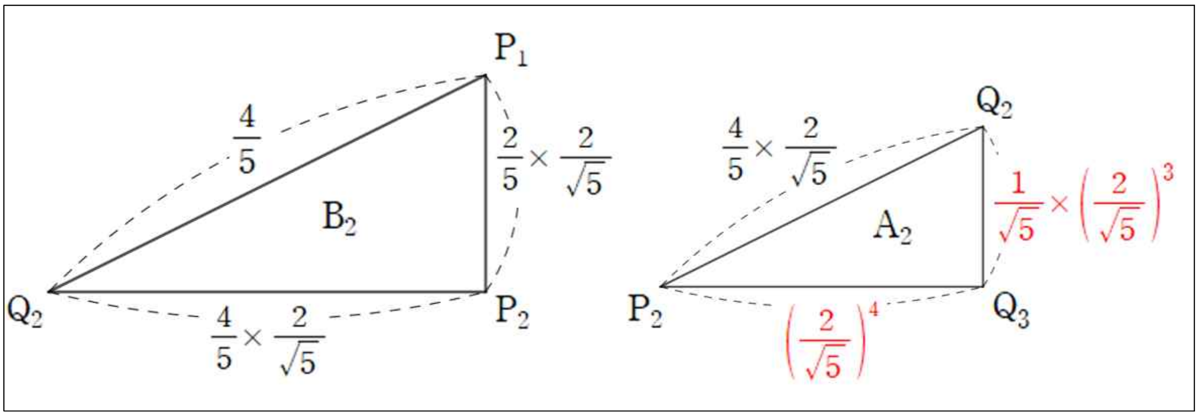


(1)에서 $P_1 = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$

ΔPOQ_1, $\Delta P_1Q_2Q_1$, $\Delta P_2Q_3Q_2$, …와 ΔPP_1Q_1, $\Delta P_1P_2Q_2$, …가 모두 닮음임을 이용하면







$$
\begin{aligned}
y_2 &= \mathrm{P_2Q_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 \\
x_2 &= 2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 \\
y_1 &= \mathrm{P_1Q_2} = \frac{4}{5} \\
x_1 &= 2 \times \frac{4}{5} = 2 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

이다. 따라서 공비

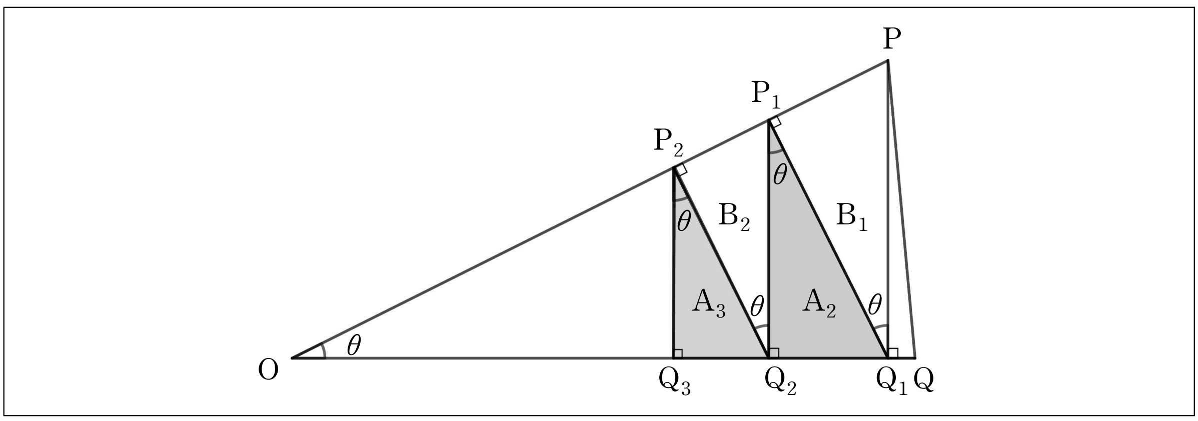
$$r = \frac{x_2}{x_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} \tag{11}$$

이다. 그러므로

$$x_n = \frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \tag{12}$$

로 유추할 수 있다.

[문제 2-2]의 별해2



모든 삼각형은 닮음이다.

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{13}$$

임을 이용하면

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{P_1Q_1}} &= \overline{\mathrm{OQ_1}}\sin\theta = 2\times\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y_1 = \overline{\mathrm{P_1Q_2}} &= \overline{\mathrm{P_1Q_1}}\cos\theta = 2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} \\ x_1 &= 2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

이다.

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{P_2Q_2}} &= \overline{\mathrm{P_1Q_2}}\cos\theta = 2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_2 = \overline{\mathrm{P_2Q_3}} &= \overline{\mathrm{P_2Q_2}}\cos\theta = 2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} \\ x_2 &= 2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4 \end{aligned} \tag{15}$$

따라서

$$r = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^4}{2\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} \tag{16}$$

이다. 그러므로

$$x_n = \frac{8}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \tag{17}$$

로 유추할 수 있다.

[문제 2-3]
삼각형 $\mathrm{PQ_1Q}$의 넓이 $\mathrm{A_1}$은

$$\mathrm{A_1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{11}\times 1 = \frac{1}{11} \tag{18}$$

이다.

$k \geq 1$일 때

$$\mathrm{P}_k = \left(\frac{8}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}, \frac{4}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\right), \mathrm{Q}_{k+1} = \left(\frac{8}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}, 0\right) \tag{19}$$

이다. $k \geq 2$일 때 삼각형 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k-1}$의 넓이 A_k는

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_k &= \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k}\times\overline{\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k-1}} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}\times\left\{\frac{8}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-3}-\frac{8}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}\times\frac{8}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{k-3}\times\left(1-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{2^{4k-6}}{5^{2k-2}}\end{aligned} \tag{20}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k &= \mathrm{A}_1 + \sum_{k=2}^{n}\mathrm{A}_k \\ &= \frac{1}{11}+\frac{4}{25}\times\frac{1-\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{16}{25}\right)} \\ &= \frac{1}{11}+\frac{4}{9}\left\{1-\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1}\right\} \\ &> \frac{5}{11}\end{aligned} \tag{21}$$

이므로

$$1-\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1} > \frac{4}{11}\times\frac{9}{4}=\frac{9}{11} \tag{22}$$

이다. 즉

$$\left(\frac{16}{25}\right)^{n-1} < \frac{2}{11}\approx 0.18 \tag{23}$$

인 n의 최솟값을 구하면 된다.

$$
\begin{aligned}
n=2, &\quad \frac{16}{25} \approx 0.64 \\
n=3, &\quad \left(\frac{16}{25}\right)^2 \approx 0.40 \\
n=4, &\quad \left(\frac{16}{25}\right)^3 \approx 0.26 \\
n=5, &\quad \left(\frac{16}{25}\right)^4 \approx 0.16 < 0.18 < \frac{2}{11}
\end{aligned} \tag{24}
$$

그러므로 $n=5$이다.