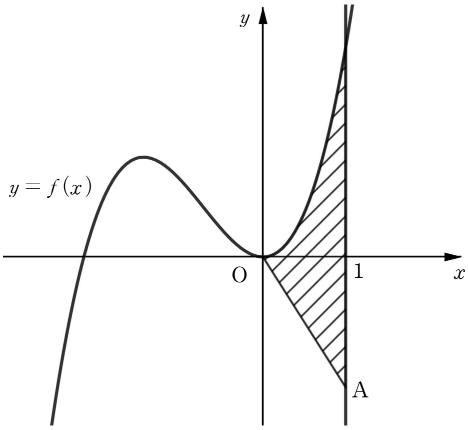
2025학년도 수시모집 논술고사 문제지 [자연계열]

수험번호		성명	

[문1]

점 $\mathrm{A}(1, m)$에서 곡선 $f(x)=x^3+3kx^2$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 없다고 하자. 아래 그림의 빗금친 부분은 선분 OA와 곡선 $y=f(x)$ 및 $x=1$로 둘러싸여 있다. (단, O는 원점이고, k는 양수이고, m은 음수이다.)



<평균값 정리>

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

[문제 1-1]

곡선 $y=f(x)$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있는 점을 $(1, d)$라 할 때, d의 범위를 구하시오.

[30점]

[문제 1-2]

m의 최댓값을 $L(k)$라 하자. m이 $L(k)$일 때, 그림의 빗금친 부분의 넓이를 $S(k)$라 하자. $S(k)$와 $\lim_{k\to\infty}\frac{S(k)}{L(k)}$를 구하시오.

[30점]

[문제 1-3]

함수 $f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값이 1일 때, 이차함수 $g(x)=x^2+px+q$ (p, q는 실수)와 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. 이때, p의 최댓값과 q의 값을 구하시오.

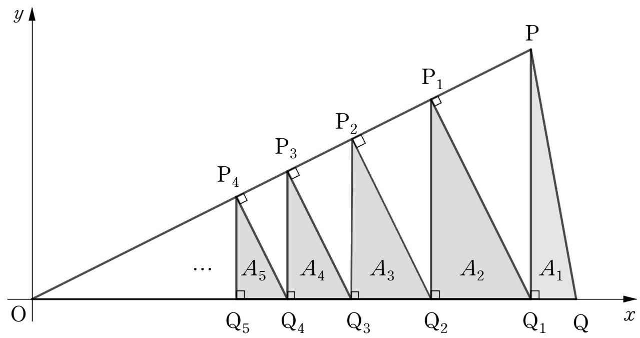
(가) 함수 $h(x)$가 극값을 갖지 않는다.

(나) $-1\le x\le 1$일 때, $\int_{-1}^{1}|x-t|\,qt^2\,dt$의 최고차항의 계수가 1이다.

[40점]

[문2]

세 꼭짓점이 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{P}(2, 1)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{24}{11}, 0\right)$인 삼각형 POQ가 있다. 점 P에서 선분 OQ에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 P_1이라 하자. 아래 그림과 같이 이 과정을 반복하여 선분 OP 위의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$와 선분 OQ 위의 점 Q_1, Q_2, Q_3, $\cdots$를 잡자. 이때 삼각형 $\mathrm{PQ_1Q}$의 넓이를 A_1, 삼각형 $\mathrm{P_1Q_2Q_1}$의 넓이를 A_2, 삼각형 $\mathrm{P_2Q_3Q_2}$의 넓이를 A_3, $\cdots$라고 하자.



<수학적 귀납법>

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[문제 2-1]

두 점 P_1과 Q_1을 지나는 직선의 방정식을 구하고, 삼각형 $\mathrm{P_1Q_2Q_1}$의 넓이 A_2를 구하시오.

[20점]

[문제 2-2]

모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 (x_n, y_n)이라 할 때, x_n을 구하고, 구한 식을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하시오.

[50점]

[문제 2-3]

$k\ge 2$인 자연수 k에 대하여 삼각형 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k\mathrm{Q}_{k-1}$의 넓이 A_k를 구하고, $A_1+\sum_{i=2}^{n}A_i>\frac{5}{11}$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

[30점]