2019학년도 수시모집 논술고사
문항해설 및 채점기준 (자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 7]

1. 일반 정보

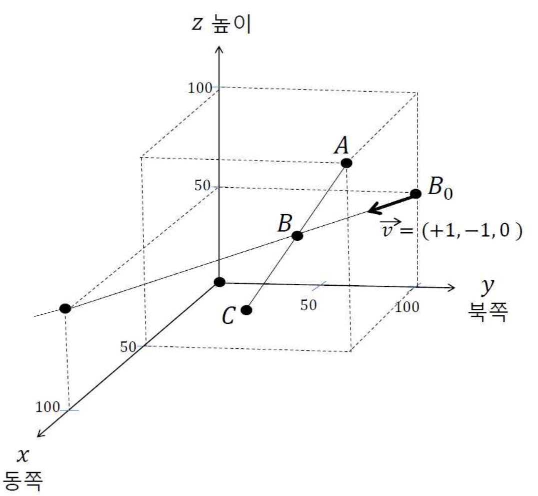
<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">논술전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">자연계열 / 문항번호 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>교육과정 과목명</td><td>기하와 벡터, 수학Ⅰ, 미적분Ⅰ</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>공간좌표, 공간벡터</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">40분 / 전체 120분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

[문1] 다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

(1) 영희가 두 대의 드론을 날리고 있다. 첫 번째 드론 A는 영희로부터 동쪽으로 50m, 북쪽으로 100m, 높이 100m의 위치에 멈추어 있다. 두 번째 드론 B는 처음에는 영희로부터 북쪽으로 100m, 높이 50m 위치인 B_0에 있다가 동쪽으로 1m/s, 남쪽으로 1m/s의 속도로 이동하고 있다. 지면에 있는 로봇 C는 두 드론 A와 B를 잇는 직선 위에 자동으로 위치하도록 프로그램 되어 있다.

(2) 동쪽을 x축 방향, 북쪽을 y축 방향, 높이를 z축 방향이라 할 때의 그림은 다음과 같다. (단, 영희의 위치는 원점으로 한다.)



【문제 1-1】
t초 후의 드론 B의 위치를 구하고, 이 때 드론 A와 B를 동시에 지나는 직선의 방향벡터와 방정식을 풀이와 함께 구하시오. [35점]

【문제 1-2】
t초 후의 로봇 C의 위치를 풀이와 함께 구하시오. [25점]

【문제 1-3】
로봇 C가 영희로부터 가장 가깝게 위치할 때의 t의 값을 풀이와 함께 구하시오. [40점]

3. 출제 의도

[문제 1-1]

- 공간벡터의 합을 이해하는가?
- 공간에서 두 점을 지나는 직선의 방향벡터와 방정식을 구할 수 있는가?

[문제 1-2]

- 공간 위의 직선의 점들 중 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

[문제 1-3]

- 공간에서의 두 점의 거리를 구할 수 있는가?
- 주어진 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 2) 공간좌표 ② 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 3) 공간벡터 ① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. ③ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 2) 공간좌표 기벡1321/1322. 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 3) 공간벡터 기벡1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-1	교육과정	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 3) 공간벡터 ① 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. ③ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 3) 공간벡터 기벡1331. 공간벡터의 뜻을 알고, 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. 기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-2	교육과정	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 3) 공간벡터 ③ 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 3) 공간벡터 기벡1333. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-3	교육과정	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 2) 공간좌표 ② 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 I] - 나. 방정식과 부등식 - 2) 이차방정식과 이차함수 ③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 I] - 다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[기하와 벡터] - 다. 공간도형과 공간벡터 - 2) 공간좌표 기벡1321/1322. 좌표공간에서 점의 좌표를 이해하고, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 I] - 나. 방정식과 부등식 - 2) 이차방정식과 이차함수 수학1223. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [미적분 I] - 다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2017	131-156
	기하와 벡터	신항균 외	지학사	2017	150-181
	수학 I	우정호 외	동아출판	2017	89-93
	미적분 I	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	116-122

5. 문항 해설

공간상에서 주어진 드론들의 조건을 이해하여 드론의 좌표와 두 드론이 지나는 직선의 방정식을 구하는지 평가한다.

공간상에서 로봇의 조건을 이해하여 로봇의 좌표를 구하는지 평가한다.

영희와 로봇 사이의 거리를 구하고, 거리가 최소화되는 시각을 구하는지 평가한다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위
문항</th><th colspan="2">채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1-1</td><td rowspan="2">드론 B의 좌표 구하기
(10점)</td><td>(1)을 기재한 경우(5점)
● <u>참고: 답이 정확히 맞아야만 점수부여 (이하동일)</u></td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>(1)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우(5점)
● <u>참고: 중간에 계산실수가 있더라도 풀이 방법을 이해하면 점수부여 (이하동일)</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">직선의 방향벡터 구하기
(10점)</td><td>(2)를 기재한 경우 (5점)</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>(2)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우(5점)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">직선의 방정식 구하기
(15점)</td><td>(3)을 기재한 경우 (7점)</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>(3)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우(8점)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">1-2</td><td rowspan="2">z=0일 때의 식 (10점)</td><td>(4)를 기재한 경우 (5점)</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>(4)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우(5점)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">로봇 C의 좌표 (15점)</td><td>(5)를 기재한 경우 (3점)</td><td rowspan="5">15</td></tr>
<tr><td>(5)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우(3점)</td></tr>
<tr><td>(6)을 기재한 경우 (3점)</td></tr>
<tr><td>(6)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우(3점)</td></tr>
<tr><td>(7)을 기재한 경우 (3점)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">1-3</td><td rowspan="2">영희와 로봇 C 사이의 거리
(15점)</td><td>(8)을 기재한 경우 (7점)</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>(8)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (8점)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">거리가 최소가 되게 하는 t의 값 (25점)</td><td>(9)를 기재한 경우 (5점)</td><td rowspan="5">25</td></tr>
<tr><td>(9)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (5점)</td></tr>
<tr><td>(10)을 기재한 경우 (5점)
($\sqrt{\ }$ 를 제외하여 식을 간략화 할 수 있는 경우에만 점수부여)</td></tr>
<tr><td>(11)을 기재한 경우 (5점)</td></tr>
<tr><td>(11)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (5점)
($\sqrt{\ }$ 가 있는 식을 미분하여 해결한 경우에도 점수부여)</td></tr>
</table>

7. 예시 답안

[문제 1-1 예시답안]

① 먼저 t초 후의 드론 B의 위치는

$$(0,100,50)+t(1,-1,0)=(t,100-t,50) \qquad \text{-----------------(1)}$$

이다.

② 드론 A와 B를 지나는 직선의 방정식의 방향벡터는

$$(50,100,100)-(t,100-t,50)=(50-t,t,50) \qquad \text{------------(2)}$$

이다.

● <u>(2)의 다른 가능한 답안</u>:

$$(t,100-t,50)-(50,100,100)=(t-50,-t,-50)$$

③ 그러므로 드론 A와 B를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-50}{50-t}=\frac{y-100}{t}=\frac{z-100}{50} \qquad \text{-------------------(3)}$$

이다.

● <u>(3)의 다른 가능한 답안</u>:

$$\frac{x-50}{t-50}=\frac{y-100}{-t}=\frac{z-100}{-50}$$

$$\frac{x-(50-t)}{\pm(50-t)}=\frac{y-t}{\pm t}=\frac{z-50}{\pm 50}$$

[문제 1-2 예시답안]

① 로봇 C는 지면에 있으므로 직선의 방정식 $\frac{x-50}{50-t}=\frac{y-100}{t}=\frac{z-100}{50}$에 $z=0$을 대입하면

$$\frac{x-50}{50-t}=\frac{y-100}{t}=-2 \quad \text{-------------------------} \quad (4)$$

를 얻을 수 있다.

● **<u>(4)의 다른 가능한 답안</u>**: (3)의 다른 답안에 의한 답도 가능.

② 이제 x,y 값을 구하자. 먼저 $x-50=-100+2t$ 이므로

$$x=2t-50 \quad \text{------------------------} \quad (5)$$

이다. 또한 $y-100=-2t$이므로

$$y=-2t+100 \quad \text{----------------------} \quad (6)$$

이다. 그러므로 로봇 C의 위치는

$$(2t-50,-2t+100,0) \quad \text{--------------} \quad (7)$$

이다.

[문제 1-3 예시답안]

① 영희와 로봇 C 사이의 거리는 원점 $(0,0,0)$과 $(2t-50,-2t+100,0)$ 사이의 거리이므로

$$\sqrt{(2t-50)^2+(-2t+100)^2}=\sqrt{4t^2-200t+2500+4t^2-400t+10000}$$
$$=\sqrt{8t^2-600t+12500} \quad \text{--(8)}$$

이다.

② 거리가 최소가 되기 위해서는 $\sqrt{\ }$ 안의 값이 최소가 되면 되므로

$$f(t)=8t^2-600t+12500 \quad \text{-----------------(9)}$$

이라 놓자.

● **<u>주의:</u>** f(t)를 정의할 때 $\sqrt{\ }$를 넣어서 아래 과정에서 복잡한 미분을 하면 (9)에 대한 점수 부여를 하지 않음.

③ 최솟값을 구하기 위해 $f(t)$를 미분하면

$$f'(t)=16t-600 \quad \text{-----------------------(10)}$$

이다.

● **<u>(10)의 대체 답안:</u>** f(t)를 이차방정식으로 보고 꼭지점의 x좌표를 생각하여 (11)을 얻어내도 (10)에 대한 점수 부여.

④ $f'(t)=0$이 되는 t의 값은

$$t=\frac{600}{16}=\frac{75}{2} \quad \text{-------------------------(11)}$$

이다.

[덕성여자대학교 문항정보 8]

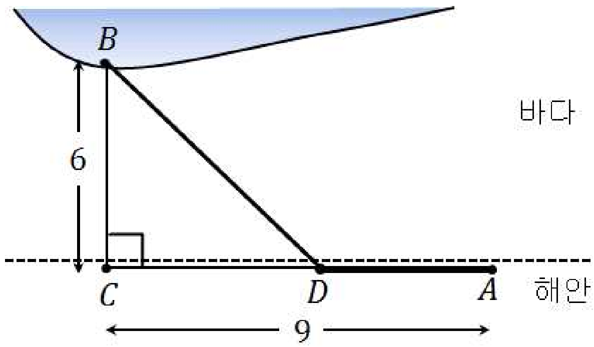
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	미분법, 도함수, 이계도함수, 극값, 최댓값, 최솟값, 피타고라스의 정리
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

다음 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

(1) 아래의 그림과 같이 해안으로부터 수직거리가 $6km$ 떨어진 섬에 있는 점 B가 있다. 해안에 있는 점 A로부터 점 B까지 가스관을 설치하려고 한다. 해안을 따라 가스관을 설치하는 비용은 $1km$ 당 P원이 들고, 바다 밑으로 설치하는 비용은 $1km$ 당 Q원이 든다고 하자. (단, $\overline{AC}$는 해안과 일치하는 것으로 간주한다.)



(2) 점 C를 점 B에서 해안에 내린 수선의 발이라 하면 $\overline{AC}$의 거리는 $9km$이다.

(3) 가스관 설치방법은 해안선을 따라 점 A로부터 $\overline{AC}$ 위의 임의의 점 D까지 연결하고 점 D로부터 B까지 직선으로 연결한다.

【문제 2-1】

총 설치비용을 T원이라고 하자. $\overline{CD}$의 길이를 x라 할 때 T를 x의 식으로 풀이와 함께 나타내시오. [15점]

【문제 2-2】

$\dfrac{dT}{dx}$를 구하고, $\dfrac{dT}{dx}=0$이 되는 x값을 구하시오. 이때, $0 \le x \le 9$에서 T가 극값을 갖기 위한 P와 Q 사이의 관계를 모두 구하시오. [50점]

【문제 2-3】

$P=4000,\ Q=5000$일 때, T가 극값을 가질 x값을 구하시오. 이 극값이 최솟값이 되는 이유를 $\dfrac{d^2T}{dx^2}$를 이용하여 설명하시오. 또한 이때, 최소비용을 구하시오. [35점]

3. 출제 의도

본 문제는 주어진 실생활의 문제를 수학의 함수 문제로 변환할 수 있으며, 함수의 최댓값과 최솟값의 문제를 미분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-1]

피타고라스 정리를 이용하여 두 점 사이의 길이를 구할 수 있으며, 구하려는 총 길이를 구할 수 있는가를 평가한다.

[문제 2-2]

미분가능한 함수의 도함수와 이계도함수를 구할 수 있으며, 이를 구하기 위하여 합성함수 미분법을 알고 있는지를 평가한다. 또한 주어진 구간에서 극값을 갖기 위한 조건을 구할 수 있는지를 평가한다.

[문제 2-3]

주어진 구간에서 극값을 구하고 이계도함수를 이용하여 극값이 최댓값과 최솟값이 되는지를 구분하는 방법을 알 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[미적분I]- 다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분II]-다. 미분법 - 2) 도함수의 활용 ③ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분I]-다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분II]-다. 미분법 - 2) 도함수의 활용 미적2323. 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.
문제 2-1	교육과정	[수학I] - 다. 도형의방정식 - 1) 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학I] - 다. 도형의방정식 - 1) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
문제 2-2	교육과정	[수학I]- 나. 방정식과 부등식 - 4) 여러 가지 부등식 ② 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다. [미적분I]- 다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분II]- 다. 미분법 - 1) 여러 가지 미분법 ① 함수의 몫을 미분할 수 있다. ② 합성함수를 미분할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[수학I]- 나. 방정식과 부등식 - 4) 여러 가지 부등식 수학1242-1. 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식을 풀 수 있다. [미적분I]-다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분II]- 다. 미분법 - 1) 여러 가지 미분법 미적2311. 함수의 몫을 미분할 수 있다. 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다.
문제 2-3	교육과정	[미적분I]- 다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 ③ 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분II]- 다. 미분법 - 1) 여러 가지 미분법 ④ 이계도함수를 구할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[미적분I]-다. 다항함수의 미분법 - 3) 도함수의 활용 미적1333. 함수의 증가, 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [미적분II]- 다. 미분법 - 1) 여러 가지 미분법 미적2314. 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분I	신항균 외	지학사	2017	132-133
	미적분I	이준열 외	천재교육	2017	158, 161
	미적분II	이강섭 외	Mirae N	2018	144
	미적분II	황선욱 외	좋은책 신사고	2017	129
	미적분II	김원경 외	비상교육	2018	129
	수학I	우정호 외	동아출판	2017	82-84 124-132 146-157
기타	교사용지도서 미적분II	김원경 외	비상교육	2016	129

5. 문항 해설

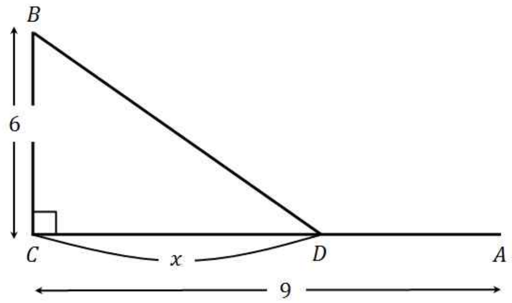
본 문항의 핵심 내용은 실생활에서 일어날 수 있는 최적값 문제를 수학 문제로 변환하여 다룰 수 있는지를 확인하고, 이 과정에서 「수학I」의 피타고라스 정리와 「미적분I」과「미적분II」의 도함수의 활용 단원의 내용을 이용할 수 있는지를 평가한다. 주어진 실생활의 문제를 수학적 문제로 바꾸어 적절한 함수의 성질을 이용할 수 있는지를 평가한다. 이 과정에서 함수의 극댓값, 극솟값과 최댓값, 최솟값을 구할 수 있는지, 또한 도함수를 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 결정할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준		배점
문제 2-1	15점	피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{BD}$의 길이를 구할 수 있다. (1-1)	7
		문제에서 구하려는 T를 나타낼 수 있다. (1-2)	8
문제 2-2	5점	합성함수 미분법을 이용하여 도함수 $\frac{dT}{dx}$를 구할 수 있다. (2-1), (2-2)	5
	14점	방정식 $\frac{dT}{dx}=0$을 구하여 정리할 수 있다. (2-3)	5
		방정식 $\frac{dT}{dx}=0$을 간단한 방정식으로 바꿀 수 있다. (2-4)	2
		양변을 제곱하여 풀수 있도록 변형할 수 있다. (2-5)	2
		x의 값을 구할 수 있다. (2-6)	5
	10점	분모가 0이 되지 않는다는 것을 알고 있다. (2-7)	5
		$P, Q>0$을 이용하여 조건을 구할 수 있다. (2-8)	5
	21점	$0 \le x \le 9$가 되기 위한 부등식을 찾을 수 있다. (2-9)	7
		부등식을 풀어 P와 Q 사이의 관계식을 찾을 수 있다. (2-10)	7
		P와 Q 사이의 관계식을 정확히 찾을 수 있다. (2-11)	5
		P와 Q사이의 관계를 정확히 구해 정리할 수 있다. (2-12)	2
문제 2-3	5점	극값이 되는 x값을 구할 수 있다. (3-1), (3-2)	5
	17점	몫의 미분법과 합성함수 미분법을 사용하였다. (3-3)	2
		$\frac{d^2T}{dx^2}$을 구하는 과정을 보여 주었다. (3-4), (3-5)	8
		$\frac{d^2T}{dx^2}$을 정확히 구하였다. (3-6)	7
	13점	$\frac{d^2T}{dx^2}>0$임을 보여 T가 최솟값이 됨을 보일 수 있다. (3-7), (3-8)	8
		최소 설치비용을 구할 수 있다. (3-9)	5

7. 예시 답안

[문제 2-1]



위 그림으로부터 $\overline{BD}$ 의 길이는 피타고라스 정리에 의하여 다음과 같다.

$$\overline{BD}^2 = x^2 + 6^2 \text{ 또는 } \overline{BD} = \sqrt{36+x^2}\,(km) \quad \text{.......................................(1-1)}$$

따라서 총 설치비용 T는 다음과 같다.

$$T = P(9-x) + Q\sqrt{36+x^2} \quad \text{...(1-2)}$$

[문제 2-2]

T의 도함수는

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ 과 합성함수 미분법} \text{..........................(2-1)}$$

을 이용하면 다음과 같다.

$$\frac{dT}{dx} = -P + \frac{Qx}{\sqrt{36+x^2}} \quad \text{.....................................(2-2)}$$

이제 T가 극값을 갖기 위하여 방정식 $\frac{dT}{dx} = 0$을 x에 대하여 풀어 보자.

$$\frac{dT}{dx} = -P + \frac{Qx}{\sqrt{36+x^2}} = \frac{Qx - P\sqrt{36+x^2}}{\sqrt{36+x^2}} = 0 \quad \text{........... (2-3)}$$

즉 방정식

$$Qx - P\sqrt{36+x^2} = 0 \text{.................................(2-4)}$$

을 풀면 된다. $Qx = P\sqrt{36+x^2}$ 라 놓고 양변을 제곱하면 다음을 얻는다.

$$Q^2x^2 = P^2(36+x^2) \text{ 이면 } (Q^2-P^2)x^2 = 36P^2 \quad \text{.................. (2-5)}$$

여기서 x의 값을 구하면 다음을 얻는다.

$$x = \frac{6P}{\sqrt{Q^2-P^2}} \quad \text{.....................................(2-6)}$$

$0 \le x \le 9$가 되기 위한 조건을 찾자. 먼저 x의 분모가 0이 되지 않아야 하므로 P와 Q의

조건은 다음과 같다.

$$Q^2 - P^2 > 0 \quad \text{...(2-7)}$$

이어야 한다. $P, Q > 0$이므로 다음을 얻는다.

$$Q > P \quad \text{... (2-8)}$$

또한 $0 \le x \le 9$가 되기 위하여 다음 부등식이 필요하다.

$$0 \le \frac{6P}{\sqrt{Q^2 - P^2}} \le 9 \quad \text{................................... (2-9)}$$

$Q > P > 0$인 조건에서 $\frac{6P}{\sqrt{Q^2 - P^2}} > 0$이므로 $\frac{6P}{\sqrt{Q^2 - P^2}} \le 9$을 풀면 된다. 이 부등식 양변을 제곱하여 풀면 다음을 얻는다.

$$\frac{36P^2}{Q^2 - P^2} \le 81 \Leftrightarrow 36P^2 \le 81(Q^2 - P^2)$$

$$\Leftrightarrow 117P^2 \le 81Q^2 \text{ 이므로 } P^2 \le \frac{81}{117}Q^2 \quad \text{.............(2-10)}$$

$$\Leftrightarrow P \le \frac{9}{\sqrt{117}}Q \quad \text{..(2-11)}$$

따라서 구하는 P와 Q 사이의 관계는 다음과 같다.

$$(0 <)P < Q \quad \text{그리고 } 0 < P \le \frac{9}{\sqrt{117}}Q \quad \text{..................... (2-12)}$$

[문제 2-3]

$P = 4000$, $Q = 5000$이기 때문에 $Q > P$이므로 [문제 2-2]에 의하여 구간 $[0,9]$에서 극값을 갖는다.

$$\sqrt{Q^2 - P^2} = \sqrt{5000^2 - 4000^2} = \sqrt{9000000} = 3000 \quad \text{.............. (3-1)}$$

이므로 식 (2-9)로부터 T를 최소로 하는 값은

$$x = \frac{6 \times 4000}{3000} = 8\ (km) \quad \text{............................... (3-2)}$$

이 된다.

몫의 미분법과 합성함수 미분법...............................(3-3)

을 이용하면 $\frac{d^2T}{dx^2}$은 다음과 같다.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{Q\sqrt{36 + x^2} - (Qx)\frac{d}{dx}\sqrt{36 + x^2}}{\left(\sqrt{36 + x^2}\right)^2} \quad \text{......................(3-4)}$$

$$= \frac{Q\sqrt{36 + x^2} - \frac{Qx^2}{\sqrt{36 + x^2}}}{36 + x^2} \quad \text{............................... (3-5)}$$

$$= \frac{Q(36+x^2)-Qx^2}{(36+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{36Q}{(36+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{..................} \ (3\text{-}6)$$

$0 \le x \le 9$이고 $Q > 0$이므로

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{36Q}{(36+x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \text{....................................}(3\text{-}7)$$

을 얻는다. 따라서 $0 \le x \le 9$에서 T의 그래프가

아래로 볼록이므로 T은 $x=8$에서 최솟값을 갖는다. .... (3-8)

바다 밑으로 설치하는 가스관의 길이는 $\sqrt{36+x^2} = \sqrt{36+64} = 10$이다. 따라서 최소비용은 다음과 같다.

$$T = 4000 \times (9-8) + 5000 \times 10 = 54000 \text{ (원)} \quad \text{.............} \ (3\text{-}9)$$

[덕성여자대학교 문항정보 9]

1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 3	
출제 범위	교육과정 과목명	수학Ⅰ, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	확률, 조건부확률, 확률의 곱셈정리, 확률의 덧셈정리, 사건의 독립과 종속
예상 소요 시간	40분 / 전체 120분	

2. 문항 및 제시문

다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

(1) 주사위 한 개를 던져서 나온 눈의 수 a $(a=1,\cdots,6)$에 대하여 좌표평면의 점 P는 원점 O로부터 다음 규칙에 따라 이동한다.

> ① 점 P는 a가 4 이하이면 x축의 방향으로 -1만큼 이동하고, a가 5 이상이면 x축의 방향으로 1만큼 이동한다.
> ② 점 P는 a가 홀수이면 y축의 방향으로 -1만큼 이동하고, a가 짝수이면 y축의 방향으로 1만큼 이동한다.

(2) 한 개의 주사위를 3번 던져서 이동한 점의 좌표를 $P(x,y)$라 하자.

[문제 3-1] $P(x,y)=P(1,3)$일 확률을 풀이와 함께 구하시오. [15점]

[문제 3-2] 점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만날 확률을 풀이와 함께 구하시오. [30점]

[문제 3-3] 점 $P(x,y)$가 원 $x^2+y^2=2$ 와 $y\ge 0$인 범위에서 만나는 사건을 A라 하고, 점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 사건을 B라 하자. 사건A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률을 풀이와 함께 구하고, 두 사건 A, B가 서로 독립인지를 아닌지 설명하시오. [55점]

3. 출제 의도

본 문항은 제시문에 설명한 내용을 바탕으로 점 $P(x,y)$의 좌표를 각 사건으로 정의하고, 경우의 수와 순서를 고려하여 사건의 확률을 계산할 수 있는지를 알아본다.

- 원점O로부터 이동한 점의 좌표가 $P(1,3)$일 사건의 확률을 계산할 수 있는지 알아본다.
- 점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 점들을 각각의 사건으로 가정하여, 주어진 사건의 확률을 계산할 수 있는 지를 알아본다.
- 점 $P(x,y)$가 원 $x^2+y^2=2$와 제1, 2 사분면에서 만나는 사건이 주어졌을 때, 점 $P(x,y)$가 제 1 사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 사건의 조건부 확률을 계산할 수 있는 지를 알아본다.
- 점 $P(x,y)$가 원 $x^2+y^2=2$와 제1, 2 사분면에서 만나는 사건과 점 $P(x,y)$가 제 1 사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 사건이 독립인지 아닌지 판단할 수 있는 지를 알아본다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
제시문	교육과정	[수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 1) 평면좌표 ① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 4) 도형의 이동 ① 평행이동의 의미를 이해한다
	성취기준·성취수준	[수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 1) 평면좌표 수학1311. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다. [수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 4) 도형의 이동 수학1341. 평행이동의 의미를 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
문제 3-1	교육과정	[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률 ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준·성취수준	[확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용 확통 1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률 확통 1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통 1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

문제 3-2	교육과정	[수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 2) 직선의 방정식 ① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률 ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학 Ⅰ] – 다. 도형의 방정식 – 2) 직선의 방정식 수학1321. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다. [확률과 통계] – (나) 확률 – 1) 확률의 뜻과 활용 확통 1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] – (나) 확률 – 2) 조건부확률 확통 1222–2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통 1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 3-3	교육과정	[수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 3) 원의 방정식 ② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용 ① 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. ② 확률의 기본 성질을 이해한다. ③ 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률 ① 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. ② 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. ③ 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
	성취기준· 성취수준	[수학 Ⅰ] - 다. 도형의 방정식 - 3) 원의 방정식 수학 1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 1) 확률의 뜻과 활용 확통 1211/1212. 통계적 확률, 수학적 확률의 의미와 확률의 기본성질을 이해한다. 확통1213. 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [확률과 통계] - (나) 확률 - 2) 조건부확률 확통 1221. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 확통 1222-1. 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 구별할 수 있다. 확통 1222-2. 독립시행의 확률을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통 1223. 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅰ	김창동 외 14인	㈜교학사	2017	124-182
	수학 Ⅰ	신항균 외 11인	㈜지학사	2017	132-189
	수학 Ⅰ	황선욱 외 24인	㈜좋은책신사고	2017	112-170
	확률과 통계	정상권 외 7인	㈜금성출판사	2017	73-118
	확률과 통계	신항균 외 11인	㈜지학사	2017	60-97
	확률과 통계	우정호 외 24인	동아출판	2018	92-139
기타	수능특강 수학영역 확률과 통계	김민경 외 4인	EBS	2018	44-69

5. 문항 해설

[문제 3-1]

제시문의 규칙에 따라 원점 O로부터 움직이는 좌표평면위의 점 $P(x,y)$가 $P(1,3)$일 조건을 찾아, 이 사건의 확률을 계산한다.

[문제 3-2]

제시문의 규칙에 따라 원점 O로부터 움직이는 좌표평면위의 점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 점들의 좌표를 각각의 사건으로 정의하고, 각 사건의 확률을 계산한다. 이를 바탕으로 점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만날 확률을 계산한다.

[문제 3-3]

제시문의 규칙에 따라 원점 O로부터 움직이는 좌표평면위의 점 $P(x,y)$가 원 $x^2+y^2=2$와 제 1사분면과 제 2사분면에서 만나는 사건 A의 확률을 구하고, 사건 A와 점 $P(x,y)$가 직선 $x=1$와 제 1사분면에서 만나는 사건 B의 교집합의 확률을 구한다. 이를 바탕으로 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 발생하는 조건부 확률을 계산한다. 그리고 계산한 결과를 바탕으로 조건부 확률과 사건 B의 확률이 일치하는지 또는 두 사건 A, B의 교집합의 확률과 두 사건의 각각의 확률의 곱이 일치하는지를 확인하여, 두 사건 A, B가 서로 독립인지 종속인지를 확인한다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위
문항</th><th colspan="2">채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">문제
3-1</td><td rowspan="2">$P(1,3)$의 확률계산 (15점)</td><td>관계식 (1)을 구한 경우 (7점)</td><td rowspan="2">15</td></tr>
<tr><td>관계식 (1)을 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (8점)</td></tr>
<tr><td rowspan="7">문제
3-2</td><td>주어진 조건에 맞는 점의 좌표 찾기 (3점)</td><td>가)를 기재한 경우</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$P(1,1)$의 확률계산 (22점)</td><td>관계식 (2)를 구한 경우 (5점)</td><td rowspan="5">22</td></tr>
<tr><td>관계식 (2)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (5점)</td></tr>
<tr><td>관계식 (3)을 구한 경우 (5점)</td></tr>
<tr><td>관계식 (3)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (5점)</td></tr>
<tr><td>관계식 (4)를 구한 경우 (2점)</td></tr>
<tr><td>제시한 문제의 확률계산 (5점)</td><td>관계식 (5)를 구한 경우</td><td>5</td></tr>
</table>

문제 3-3	사건 A에 해당하는 점의 좌표 찾기 (3점)	가)를 기재한 경우	3
	$P(-1,1)$의 확률계산 (22점)	관계식 (6)를 구한 경우 (5점)	22
		관계식 (6)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (5점)	
		관계식 (7)을 구한 경우 (5점)	
		관계식 (7)를 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (5점)	
		관계식 (8)를 구한 경우 (2점)	
	사건 A의 확률계산 (5점)	관계식 (9)를 구한 경우	5
	$P(A\cap B)$의 확률 계산 (5점)	관계식 (10)을 구한 경우 (2점)	5
		관계식 (10)을 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (3점)	
	$P(B\mid A)$의 확률 계산 (6점)	관계식 (11)를 구한 경우 (3점)	6
		관계식 (11)를 얻어내는 풀이과정 식을 서술한 경우 (3점)	
	두 사건 A, B의 독립성 판단 (14점)	관계식 (12)을 구한 경우 (5점)	14
		관계식 (12)을 얻어내는 풀이과정을 서술한 경우 (9점)	

7. 예시 답안

[문제 3-1]

가) 점 $P(x,y)$의 x좌표와 y좌표로 가능한 값은 ± 1과 ± 3이다. 점 $P(x,y)$가 점 $P(1,3)$일 사건은

주사위의 눈이 4이하이면서 짝수(이동방향은 ↖) 1번 , 5이상이면서 짝수(이동방향은 ↗) 2번인 사건이므로

이 사건의 확률은

$$ {}_3C_2\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{6}{216} \qquad \text{----------(1)}$$

이다.

> ※ 또 다른 풀이 방법:
> 좌표 (1,3)으로 이동 가능한 주사위 눈의 조합은 (2,6,6), (4,6,6)이다. 그러나 순서까지 고려하면 각각 3개의 순서 조합이 가능하므로, 구하는 확률은
> $$\frac{3\times 2}{216}=\frac{6}{216}$$
> 이다.

[문제 3-2]

가) 점 $P(x,y)$의 x좌표와 y좌표로 가능한 값은 ± 1과 ± 3이다. 점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 점의 좌표는 $(1,1)$과 $(1,3)$이다.

$P(1,3)$의 확률은 [문제 3-1]의 풀이과정 가)의 관계식 (1)에서 $\frac{6}{216}$으로 구했다.

$P(1,1)$의 확률: 점 $P(x,y)$가 $P(1,1)$일 사건의 확률은 주사위의 눈이 4이하이면서 짝수(이동방향은 ↖) 1번, 5이상이면서 짝수(이동방향은 ↗) 1번, 5이상이면서 홀수(이동방향은 ↘) 1번인 확률

$$3!\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{12}{216} \qquad \text{----------(2)}$$

주사위의 눈이 4이하이면서 홀수(이동방향은 ↙) 1번, 5이상이면서 짝수(이동방향은 ↗) 2번인 확률

$${}_3C_2\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{216} \qquad \text{----------(3)}$$

의 합으로,

$$\frac{12}{216}+\frac{6}{216}=\frac{18}{216} \qquad \text{---------(4)}$$

이다.

※ 또 다른 풀이 방법:
좌표$(1,1)$로 이동 가능한 주사위 눈의 조합은 $(2,5,6)$, $(4,5,6)$, $(1,6,6)$과 $(3,6,6)$이다. 그러나 순서까지 고려하면 (2,5,6)와 (4,5,6)의 경우 각각 3!개의 순서 조합이 가능하며, (1,6,6)과 의 (3,6,6)경우 각각 3개의 순서 조합이 가능하므로 구하는 확률은

$$\frac{3!\times 2+3\times 2}{216}=\frac{18}{216}$$

이다.

점 $P(x,y)$가 제 1사분면에서 직선 $x=1$과 만나는 확률은 점 $P(1,3)$과 $P(1,1)$일 경우의 확률의 합으로

$$\frac{6}{216}+\frac{18}{216}=\frac{24}{216}=\frac{1}{9} \qquad \text{-------------- (5)}$$

이다.

[문제 3-3]
가) 점 $P(x,y)$의 x좌표와 y좌표로 가능한 값은 ± 1과 ± 3이다. 이 중 점 $P(x,y)$가 원 $x^2+y^2=2$ 와 $y\geq 0$인 범위에서 만나는 사건 A에 속하는 점의 좌표는 $(-1,1)$과 $(1,1)$이다.

$P(1,1)$의 확률은 [문제 3-2]의 관계식 (4)에서 $\frac{18}{216}$로 구했다.

$P(-1,1)$의 확률: 점 $P(x,y)$가 $P(-1,1)$일 사건은
주사위의 눈이 4이하이면서 짝수(이동방향은 ↖) 2번, 5이상이면서 홀수(이동방향은

↘) 1번인 확률

$$ {}_3C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{12}{216} \qquad \text{-----(6)}$$

주사위의 눈이 4이하 이면서 홀수(이동방향은 ↙) 1번, 4이하 이면서 짝수(이동방향은 ↖), 5이상이면서 짝수(이동방향은 ↗) 1번인 확률

$$ 3!\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{24}{216} \qquad \text{-----(7)}$$

의 합으로

$$ \frac{24}{216}+\frac{12}{216}=\frac{36}{216} \qquad \text{-----(8)}$$

이다.

※ 또 다른 풀이 방법: 좌표$(-1,1)$로 이동 가능한 주사위 눈의 조합은 $(1,2,6)$, $(1,4,6)$, $(2,2,5)$, $(2,4,5)$, $(4,4,5)$, $(2,3,6)$, $(3,4,6)$이다. 그러나 순서까지 고려하면 $(1,2,6)$, $(1,4,6)$, $(2,4,5)$, $(2,3,6)$, $(3,4,6)$의 경우 각각 3!개의 순서 조합이 가능하며, $(2,2,5)$와 $(4,4,5)$의 경우 각각 3개의 순서 조합이 가능하므로 구하는 확률은 $$\frac{3!\times5+3\times2}{216}=\frac{36}{216}$$ 이다.

사건 A의 확률은 점 $P(-1,1)$과 $P(1,1)$일 경우의 확률의 합으로

$$ P(A)=\frac{36}{216}+\frac{18}{216}=\frac{54}{216}=\frac{1}{4} \qquad \text{------------ (9)}$$

이다.

점 $P(x,y)$가 직선 $x=1$와 제 1사분면에서 만나는 사건 B는 점 $P(x,y)$의 좌표가 $P(1,1)$, $P(1,3)$인 경우이다. 이때, 사건 A와 사건 B가 동시에 발생하는 사건은 점 $P(x,y)$가 점 $P(1,1)$일 사건으로, 사건 A와 사건 B의 교집합의 확률은 풀이과정 **[문제 3-2]**의 관계식 (4)로부터

$$ P(A\cap B)=\frac{18}{216}=\frac{1}{12} \qquad \text{---------- (10)}$$

이다.

사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 조건부 확률은 관계식 (9)와 (10)로부터

$$ P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{18/216}{54/216}=\frac{1/12}{1/4}=\frac{18}{54}=\frac{1}{3} \qquad \text{-------- (11)}$$

이다.

사건 B의 확률은 **[문제 3-2]**에서 구한 확률로 관계식(5)에서 $P(B)=\frac{1}{9}$로 계산 되었고, 사건 A가 일어났다는 조건 아래에서 사건 B가 일어날 조건부 확률은 관계식(11)에서 $P(B\mid A)=\frac{1}{3}$로 계산되었다. 이 때 사건 A가 일어났을 때, 사건 B가 일어날 조건부 확률

이 사건 B가 일어날 확률과 일치하지 않으므로

$$P(B \mid A) = \frac{1}{3} \neq P(B) = \frac{1}{9} \qquad \text{-----------(12)}$$

두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다 (두 사건 A, B는 서로 종속이다).

※ 또 다른 풀이 방법: 사건 A와 사건 B가 동시에 발생하는 사건의 확률인 사건A와 사건 B의 교집합의 확률 (풀이과정 (6))은 사건 A의 확률(풀이과정 (5))과 사건 B의 확률(풀이과정 (4))의 곱과 일치하지 않으므로 $\frac{1}{12} = P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$ 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다 (두 사건 A, B는 서로 종속이다).