2020학년도 수시모집 논술고사
문항해설 및 채점기준(자연계열)

[덕성여자대학교 문항정보 1]

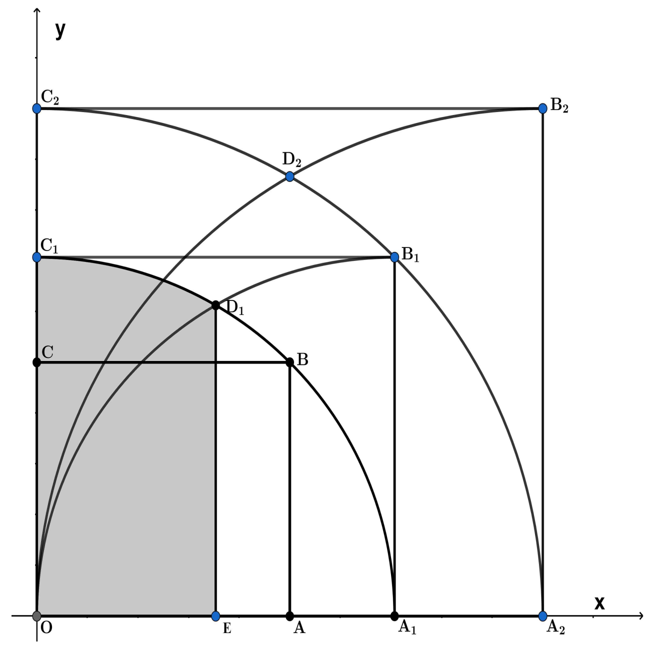
1. 일반정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	원의방정식, 등비수열, 지수함수, 삼각함수, 정적분의 치환적분법
예상 소요 시간	45분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

[문1] 다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.

(1)



<그림 1>

(가) 제 1사분면에 있는 정사각형OABC는 길이가 a인 정사각형이고, 이때 점 O는 원점이다. $(a>0)$

(나) $\overline{\mathrm{OB}}$를 반지름으로 하는 원을 제1사분면에 그리고 x축과 만나는 점을 A_1이라 하고 y축과 만나는 점을 C_1이라 하자. 정사각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ 내부에 만들어지는 중심이 A_1인 호 OB_1과 중심이 O인 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1$의 교점을 D_1이라고 하자.

(다) (나)과 같은 방법으로 $\overline{\mathrm{OB}_1}$을 반지름으로 하는 원을 제1사분면에 그리고 x축과 만나는 점을 A_2이라 하고 y축과 만나는 점을 C_2이라 하자. 정사각형 $\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$ 내부에 만들어지는 호 OB_2와 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2$의 교점을 D_2이라고 하자.

(라) 이와 같은 방법을 n회 반복하여 점 D_n을 구한다.

(1) 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여, 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

[문제 1-1]

점 D_1과 점 D_2의 좌표를 원의 방정식을 활용하여 구하시오. [25점]

[문제 1-2]

점 D_n의 좌표를 구하고, 곡선 $y=\frac{\sqrt{3}}{64a^2}x^3$이 점 D_n을 지나는 n의 값을 풀이와 함께 구하시오. [30점]

[문제 1-3]

<그림1>에서 호 $\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$과 x축, y축, 그리고 점 D_1에서 x축에 수직으로 내린 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 제시문(2)를 활용하여 구하시오. [45점]

3. 출제 의도

- 원의 방정식을 구하고, 교점의 좌표를 구할 수 있는지 알아본다.
- 등비수열의 일반항을 구할 수 있는지 알아본다.
- 지수방정식의 근을 구할 수 있는지 알아본다.
- 삼각함수를 활용한 정적분의 치환적분법을 적용하여 문제에 주어진 영역의 넓이를 구할 수 있는지 알아본다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수학 I] - 다. 도형의 방정식 - 1) 원의방정식 ① 원의 방정식을 구할 수 있다. ② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. [수학 II] - 다. 수열 - 1) 등차수열과 등비수열 ① 수열의 뜻을 안다. ③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [미적분 II] - 가. 지수함수와 로그함수 - 1) 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 ③ 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 - 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 - 2) 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [미적분 II] - 라. 적분법 - 1) 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 - 1) 정적분의 활용 ① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학 I] - 다. 도형의 방정식 - 1) 원의 방정식 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다. 수학1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다. 수학1332-2. 좌표평면에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-1	

	[수학 I] - 다. 도형의 방정식 - 1) 원의 방정식 수학1331. 원의 방정식을 구할 수 있다. 수학1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다. 수학1332-2. 좌표평면에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 1-2	[수학 II] - 다. 수열 - 1) 등차수열과 등비수열 수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다. 수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다. [미적분 II] - 가. 지수함수와 로그함수 - 1) 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 미적2113-1. 지수함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
문제 1-3	[미적분 II] - 나. 삼각함수 - 1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분 II] - 나. 삼각함수 - 2) 삼각함수의 미분 미적2221-2. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [미적분 II] - 라. 적분법 - 1) 여러 가지 적분법 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2413-2. 삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다. [미적분 II] - 라. 적분법 - 1) 정적분의 활용 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학 I	김창동 외 14인	㈜교학사	2017	154-168		
	수학 II	신항균 외 11인	㈜지학사	2017	122-141		
	미적분 II	우정호 외 24인	동아출판	2017	10-35, 60-119, 206-210, 220-224		
	미적분 II	황선욱 외 10인	좋은책 신사고	2017	12-42, 48-91, 132-155		
기타	수능특강 수학영역 수학II & 미적분I	김민경 외 5인	EBS	2019	46-57		
	수능특강 수학영역 미적분II	강인우외 3인	EBS	2019	4-15, 28-41, 86-87, 100-103		

5. 문항 해설

[문제 1-1]

제시문의 규칙에 따라 바뀌는 중심의 좌표와 반지름의 길이가 늘어나는 원의 방정식을 구하고, 정사각형 안에서 만나는 두 호의 교점 $\mathrm{D_1}$과 교점 $\mathrm{D_2}$의 좌표를 구한다.

[문제 1-2]

제시문의 규칙에 따라 원의 방정식을 구하고, 정사각형 안에서 만나는 두 원의 교점의 좌표를 구하여 교점의 x좌표와 y좌표가 등비수열이며 등비수열의 일반항이 좌표가 되는 점 $\mathrm{D_n}$를 구한다. 곡선 $y=\frac{\sqrt{3}}{64a^2}x^3$이 점 $\mathrm{D_n}$를 지나는 n을 구한다.

[문제 1-3]

제시문의 규칙에 따라 제1사분면에 그려지는 호 $\mathrm{C_1D_1}$의 내부에서 x의 범위가 원점에서부터 점 $\mathrm{D_1}$의 x좌표까지 일 때, 삼각함수를 활용한 정적분의 치환적분법을 적용하여 문제에 주어진 영역의 넓이를 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준		배점
문제 1-1	<<풀이 1>>의 a)를 기재한 경우 (10점)	식(1)과 (2)를 모두 구한 경우 A	10
		식(1)을 구하고 호OB_1 중심과 반지름을 구한 경우 B	8
		식(1)을 구하고 호OB_1 중심과 반지름의 값이 틀린 경우 C	5
		식(1)을 구한 경우 D	3
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	<<풀이 1>>의 b)를 기재한 경우 (5점)	b)의 내용을 모두 기재한 경우 A	5
		x값 또는 y값의 계산이 틀린 경우 C	3
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	<<풀이 1>>의 c)를 기재한 경우 (10점)	c)의 내용을 모두 기재한 경우 A	10
		식(5)와 (6)을 사용하여 식(7)을 구하였으나 식(8)의 계산이 틀린 경우 B	8
		식(5)와 (6)을 사용하여 식(7)을 구한 경우 C	5
		식(5)를 구하고 호OB_2의 중심과 반지름의 값이 틀린 경우 D	3
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	<<풀이 1>>이 아닌 <<풀이 2>>의 방법으로 기재한 경우 10점	삼각비를 고려하여 식(4)와 식(8)의 값을 구한 경우 A	10
		식(4)와 식(8)의 값을 구한 경우 B	8
		식(4)와 식(8)의 계산값이 틀린 경우 C	6
		식(4)의 값을 구한 경우 C	3
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
문제 1-2	a)를 기재한 경우 (15점)	닮음비를 고려하여 식(9)를 구한 경우 A	15
		식(9)를 구한 경우 B	10
		중간 과정이 틀렸지만 식(9)를 구한 경우 C	8
		식(9)의 값이 틀린 경우 D	5
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	b)를 기재한 경우 (15점)	b)의 <<풀이1>> 또는 <<풀이2>>로 내용을 기재하고 식(11)의 값이 맞은 경우 A	15

		<<풀이1>> 또는 <<풀이2>>에서 계산이 틀린 경우 B	12
		식(10)를 쓴 경우 C	7
		식(10)의 값이 틀린 경우 D	5
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
문제 1-3	<<풀이 1>>의 a)를 기재한 경우 (15점)	식(13)을 기재한 경우 A	15
		식(13)에서 x의 범위가 틀린 경우 B	12
		식(12)을 기재한 경우 C	8
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	<<풀이 1>>의 b)를 기재한 경우 (10점)	식(14) 또는 식(15)의 과정을 서술한 경우 A	10
		식(14) 또는 식(15)에서 과정이 틀린 경우 B	8
		$x=\sqrt{2}a\sin\theta$로 치환하고 θ의 구간과 $dx=\sqrt{2}a\cos\theta d\theta$를 구한 경우 또는 $x=\sqrt{2}a\cos\theta$로 치환하고 θ의 구간과 $dx=-\sqrt{2}a\sin\theta d\theta$를 구한 경우 C	5
		$x=\sqrt{2}a\sin\theta$ 또는 $x=\sqrt{2}a\cos\theta$ 로 치환한 경우 D	3
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	<<풀이 1>>의 c)를 기재한 경우 (20점)	식(18) 또는 식(19)의 풀이과정을 서술하여 답을 구한 경우 A	20
		식(18) 또는 식(19)의 풀이과정을 서술한 경우 B	16
		식(16) 또는 식(17)을 구한 경우 C	12
		식(16) 또는 식(17)을 잘못 구한 경우 D	10
		답을 쓰지 못한 경우 E	0
	<<풀이 1>>이 아닌 <<풀이 2>>의 방법으로 기재한 경우 20점	<<풀이2>>의 과정을 모두 서술하여 답을 구한 경우 A	20
		<<풀이2>>의 b)만 서술한 경우 B	16
		<<풀이2>>의 b)에서 계산이 틀린 경우 C	14
		직각삼각형의 넓이를 구하였으나 부채꼴이 넓이를 구하지 못한 경우 D	10
		답을 쓰지 못한 경우 E	0

7. 예시 답안

[문제 1-1]

<<풀이1>>

a) 호 A_1C_1은 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름이 $\sqrt{2}a$인 원이 제 1사분면에 그려진 곡선으로, 호 A_1C_1의 식은 다음과 같다.

$$x^2+y^2=2a^2 \qquad x>0,\ y>0.\ \text{---(1)}$$

호 OB_1는 중심이 $(\sqrt{2}a,\ 0)$이고 반지름이 $\sqrt{2}a$인 원이 제 1사분면에 그려진 곡선으로, 호 OB_1의 식은 다음과 같다.

$$(x-\sqrt{2}a)^2+y^2=2a^2 \qquad x>0,\ y>0.\ \text{----(2)}$$

b) 호 OB_1와 호 A_1C_1의 교점 D_1의 x좌표는 식 (1)과 (2)로부터 다음의 방정식을 만족한다.

$$(x-\sqrt{2}a)^2=x^2\ \text{---(3)}$$

위의 식 $x^2-2\sqrt{2}ax+2a^2=x^2$을 만족하는 x값은

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

가 되고, 식 (2)로부터 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a$일 때 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2+y^2=2a^2$을 만족하는 y값은

$$y=\sqrt{\frac{3}{2}a^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a \qquad (\because y>0)$$

이므로, 교점 D_1의 좌표는 다음과 같다.

$$D_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a\right)\ \text{---(4)}$$

c) $\overline{OB_1}$의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{2}a)^2}=2a$이므로 사각형 $OA_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $2a$인 정사각형이다. 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 내부에 만들어지는 호 A_2C_2는 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름이 $2a$인 원이 제1사분면에 그려진 곡선으로, 호 A_2C_2의 식은 다음과 같다.

$$x^2+y^2=4a^2 \qquad x>0,\ y>0. \text{ ---(5)}$$

호 $\mathrm{OB_2}$는 중심이 $(2a,\ 0)$이고 반지름이 $2a$인 원이 제1사분면에 그려진 곡선이므로 호 $\mathrm{OB_2}$의 식은 다음과 같다.

$$(x-2a)^2+y^2=4a^2 \qquad x>0,\ y>0. \text{ ----(6)}$$

b)의 풀이와 유사한 방법으로 호 $\mathrm{OB_2}$와 호 $\mathrm{A_2C_2}$의 교점 $\mathrm{D_2}$의 x좌표는 식(5)와 (6)으로부터 다음을 만족한다.

$$(x-2a)^2=x^2 \text{ ---(7)}$$

식(7), 즉 $x^2-4ax+a^2=x^2$을 만족하는 x값은

$$x=a$$

이고, 식(5)로부터 $x=a$일 때 $a^2+y^2=4a^2$을 만족하는 y값은

$$y=\sqrt{3}\,a \qquad (\because y>0)$$

이므로, 교점 $\mathrm{D_2}$의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{D_2}(a,\ \sqrt{3}\,a) \text{ ---(8)}$$

<<풀이2>>

a) 점 $\mathrm{D_1}$에서 x축에 수직으로 내린 직선과 x축이 만나는 점을 E라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{OD_1}}$의 길이는 $\sqrt{2}\,a$이고, $\overline{\mathrm{OE}}$의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$가 되어 직각삼각형 $\mathrm{OD_1E}$는 각 $\angle \mathrm{OD_1E}$가 $60^\circ=\frac{\pi}{3}$이고 밑변의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 빗변의 길이가 $\sqrt{2}\,a$인 삼각형이다. 삼각비를 이용하여 $\overline{\mathrm{ED_1}}$의 길이를 구하면 $\frac{\sqrt{6}}{2}a$이므로, 교점 $\mathrm{D_1}$의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{D_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{6}}{2}a\right) \text{ ---(4)}$$

a) 유사한 방법으로 직각삼각형 $\mathrm{OD_2A}$는 빗변의 길이가 $2a$이고 각 $\angle \mathrm{OD_2A}$가 $60^\circ = \frac{\pi}{3}$인 삼각형이므로, 삼각비를 이용하여 구한 교점 $\mathrm{D_2}$의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{D_2}(a,\ \sqrt{3}a) \text{ ---(8)}$$

[문제 1-2]

a) 닮음비를 고려하여 교점 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{D_2}$의 x좌표는 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a$, $x_2 = a$이고, 이는 첫 항이 $\frac{1}{\sqrt{2}}a$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열을 만족한다. x좌표의 n번째 항(일반항)은 다음과 같다.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}a(\sqrt{2})^{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\sqrt{2})^{n-1} = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}a.$$

x좌표와 마찬가지로 교점 $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{D_2}$의 y좌표는 각각 $y_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}a$, $y_2 = \sqrt{3}a$이고, 이는 첫 항이 $\frac{\sqrt{6}}{2}a$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열을 만족한다. y좌표의 n번째 항(일반항)은 다음과 같다.

$$y_n = \frac{\sqrt{6}}{2}a(\sqrt{2})^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2})^n a.$$

그러므로 점 D_n의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{D}_n\left(\frac{(\sqrt{2})^n}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2})^n a\right) \text{ ---(9)}$$

a)

<<풀이1>>

곡선 $y = \frac{\sqrt{3}}{64a^2}x^3$이 점 D_n을 지나는 n의 값은 다음 방정식을 풀면 구할 수 있다.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2})^n a = \frac{\sqrt{3}}{64a^2}\left(\frac{(\sqrt{2})^n}{2}a\right)^3 \text{ ---(10)}$$

즉,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2})^n a = \frac{\sqrt{3}}{64a^2}\frac{(\sqrt{2})^{3n}}{2^3}a^3$$

이로부터

$$(\sqrt{2})^{2n} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{64a^2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a^3}2^3 = 64\times 2^2 = 2^8$$

이 되므로

$$(\sqrt{2})^{2n} = 2^n = 2^8$$

을 만족한다. 그러므로

$$n = 8 \quad \text{---(11)}$$

이다.

<<풀이2>>

원점에서 점 D_n을 지나는 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고, 직선 $y=\sqrt{3}x$와 곡선 $y=\frac{\sqrt{3}}{64a^2}x^3$는 점 $\mathrm{D}_n\left(\frac{(\sqrt{2})^n}{2}a,\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2})^n a\right)$에서 만난다.

$$\sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{64a^2}x^3$$

로부터

$$\sqrt{3}\frac{(\sqrt{2})^n}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{64a^2}\left(\frac{(\sqrt{2})^n}{2}a\right)^3 \quad \text{---(10)}$$

이고,

$$(\sqrt{2})^{2n} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{64a^2}{\sqrt{3}}\frac{1}{a^3}2^3 = 64\times 2^2 = 2^8$$

이 되므로

$$(\sqrt{2})^{2n} = 2^n = 2^8$$

을 만족하다. 그러므로

$$n = 8 \quad \text{---(11)}$$

이다.

[문제 1-3]
<<풀이1>>

a) <그림1>에서 호 C_1D_1과 x축, y축, 그리고 교점 D_1에서 x축에 수직으로 내린 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하자. 제시문(5)을 활용하면 넓이 S는 식(1)로부터 구한 다음의 식(12)를 x의 구간 $\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$에서 정적분한 값이 된다.

$$y = \sqrt{2a^2 - x^2} \quad (\because y \geq 0) \quad \text{---(12)}$$

즉, 구하는 넓이는

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \sqrt{2a^2 - x^2}\,dx \quad \text{---(13)}$$

이다.

a) 제시문(5)을 활용하여 정적분을 위해 $x = \sqrt{2}\,a\sin\theta$로 치환하면, x의 구간 $\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$에 대하여 θ의 구간은 $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$이 되고 $dx = \sqrt{2}\,a\cos\theta d\theta$이고, θ의 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right]$에서 $\cos\theta \geq 0$을 만족하므로

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \sqrt{2a^2 - x^2}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2a^2 - (\sqrt{2}\, a \sin\theta)^2}\, \sqrt{2}\, a \cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{2}\, a \sqrt{(1 - \sin^2\theta)}\, \sqrt{2}\, a \cos\theta d\theta \\
&= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2\theta d\theta
\end{aligned}
\quad \text{---(14)}
$$

이다.

※ 제시문(5)을 활용하여 정적분을 위해 $x = \sqrt{2}\, a \cos\theta$로 치환하면, x의 구간 $\left[0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$에 대하여 θ의 구간은 $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$이 되고 $dx = -\sqrt{2}\, a \sin\theta d\theta$이고, θ의 구간 $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 $\sin\theta > 0$을 만족하므로

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \sqrt{2a^2 - x^2}\, dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2a^2 - (\sqrt{2}\, a \cos\theta)^2}\, (-\sqrt{2}\, a \sin\theta) d\theta \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\, a \sqrt{(1 - \cos^2\theta)}\, \sqrt{2}\, a \sin\theta d\theta \\
&= 2a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta
\end{aligned}
\quad \text{---(15)}
$$

이다.

b) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta \times \cos\theta - \sin\theta \times \sin\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2 - 1$$

로부터

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \text{---(16)}$$

을 구한다.

※ 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여

$$\cos(2\theta)=\cos(\theta+\theta)=\cos\theta\times\cos\theta-\sin\theta\times\sin\theta=\left(1-\sin^2\theta\right)-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta$$

로부터

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos(2\theta)}{2} \quad \text{---(17)}$$

을 구한다.

식(14)로부터 <그림1>에서 호 C_1D_1과 x축, y축, 그리고 교점 D_1에서 x축에 수직으로 내린 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos(2\theta))d\theta \\ &= a^2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=a^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{---(18)} \\ &= a^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

※ 식(15)로부터 <그림1>에서 호 C_1D_1과 x축, y축, 그리고 교점 D_1에서 x축에 수직으로 내린 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이 S는

$$\begin{aligned} S &= 2a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(2\theta))d\theta \\ &= a^2\left[\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=a^2\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right\} \quad \text{---(19)} \\ &= a^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

<<풀이2>>

a) 점 D_1에서 x축에 수직으로 내린 직선과 x축이 만나는 점을 E라 하자. <그림1>에서 호 C_1D_1과 x축, y축, 그리고 점 D_1에서 x축에 수직으로 내린 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 부채꼴 OC_1D_1의 넓이와 직각삼각형 OD_1E의 넓이로 나누어서 구할 수 있다. 직각삼각형 OD_1E는 밑변의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 높이가 $\frac{\sqrt{6}}{2}a$, 빗변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 직각삼각형으로 각 $\angle OD_1E$가 $60^\circ=\frac{\pi}{3}$이다. 그리고 부채꼴 OC_1D_1의 중심각이 $30^\circ=\frac{\pi}{6}$이다.

b) 그러므로 직각삼각형 OD_1E의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OE}}\times\overline{\mathrm{ED_1}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

이고, 부채꼴 $\mathrm{OC_1D_1}$의 넓이는

$$\pi\times(\sqrt{2}\,a)^2\times\frac{\pi/6}{2\pi}=\pi\times(\sqrt{2}\,a)^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}=\pi\times 2a^2\times\frac{1}{12}=\frac{\pi}{6}a^2$$

이 되어, 구하는 영역의 넓이 S는

$$S=\frac{\pi}{6}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=a^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\quad\text{---(20)}$$

이 된다.

[덕성여자대학교 문항정보 2]

1. 일반정보

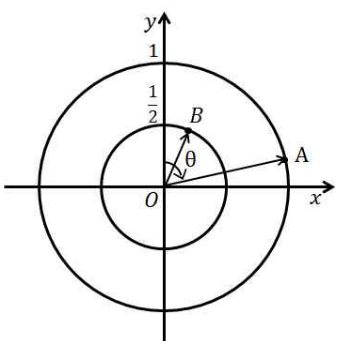
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형 고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문항번호 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅱ, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	대칭성, 삼각함수의 덧셈정리, 위치벡터, 벡터의 내적
예상 소요 시간	45분/90분	

2. 문항 및 제시문

[문2] **다음의 제시문을 읽고 아래의 문제에 답하시오.**

분침과 시침의 길이가 각각 1과 $\frac{1}{2}$인 <그림 2>와 같은 시계가 있다. <그림 3>은 시계의 중심을 원점 O에 두고 분침의 끝점을 점 A, 시침의 끝점을 점 B라 하고 좌표평면을 이용하여 시계를 나타낸 것이다. 12시를 나타내는 양의 y축으로부터 시작하여 시계방향으로 선분 OA가 회전하는 양을 나타내는 각을 θ라 하자.

<그림 36>



<그림 37>

【문제 2-1】

1시 40분과 2시 사이에서 시계의 시침과 분침이 각각 y축과 이루는 각이 같을 때의 시각을 풀이와 함께 구하시오. (단, 분 단위는 소수점 아래 부분을 반올림한다.) [30점]

【문제 2-2】
4시와 5시 사이에서 삼각형 OAB의 넓이를 최대로 하는 시각을 풀이와 함께 구하시오. (단, 분 단위는 소수점 아래 부분을 반올림한다.) [30점]

【문제 2-3】
두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$사이의 각을 t라 할 때 $\cos t$를 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin \alpha t$ 또는 $\cos \alpha t\ (\alpha > 0)$의 꼴로 나타내고, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 서로 수직이 되는 θ의 값을 구하시오. (단, θ는 $0 \le \theta \le 24\pi$) [40점]

3. 출제 의도

본 문제는 일상생활에서 관찰되는 궁금증을 수학을 이용하여 해결하는 것이다. 먼저 시계의 긴 바늘과 짧은 바늘이 갖는 대칭성을 조사하는 방법을 알고 있는지를 평가한다. 두 변의 길이가 일정한 삼각형의 넓이가 최대가 되는 것은 직각삼각형임을 알고 있으며 또는 구체적으로 두 벡터의 내적의 절댓값이 두 벡터로 이루어진 삼각형의 넓이가 됨을 이용하여 넓이의 최댓값이 되는 직각삼각형임을 알고 있으며 주어진 조건에 맞는 시각을 찾을 수 있는지를 평가한다. 위치 벡터를 설정하는 방법과 벡터의 내적의 성질과 의미를 알고 있는지를 평가한다. 삼각함수의 성질과 합과 차의 공식을 이용할 수 있으며 두 직선이 수직이 되는 조건을 알고 있는지를 평가한다.

[문제 2-1]
시계의 긴 바늘과 짧은 바늘이 대칭이 되는 시각을 분침과 시침 사이에 관계를 이용하여 구할 수 있으며 소수점 아래 반올림할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 2-2]
같은 꼭짓점을 갖는 두 선분의 끝점을 잇는 삼각형의 넓이의 최댓값은 직각삼각형임을 알고 있으며, 주어진 조건을 만족하는 시각을 구체적으로 구할 수 있으며 소수점 아래 반올림할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

[문제 2-3]
위치 벡터를 삼각함수를 이용하여 나타낼 수 있는지를 평가하고 두 벡터 사이의 각을 구하기 위하여 벡터의 내적을 이용할 수 있는지를 알아보고, 삼각함수의 합과 차의 공식을 이용하여 단순화할 수 있는지를 평가한다. 또한 90°에서 코사인의 값이 0이 됨과 삼각함수의 성질 가운데 주기함수의 성질을 이용하여 결과를 얻을 수 있는지를 평가하는 문제이다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식 ② 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다. [미적분II]-다. 삼각함수-1) 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다. ② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수의 그래프를 그릴 수 있다. ③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분II]-다. 삼각함수-2) 삼각함수의 미분 ① 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [기하와 벡터]-나. 평면 벡터-2) 평면벡터의 성분과 내적 ① 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문	[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식 수학1322-2 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분II]-다. 삼각함수-1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2211-2 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. 미적2212-1 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 미적2213 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. [미적분II]-다. 삼각함수-2) 삼각함수의 미분 미적2221-2 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [기하와 벡터]-나. 평면 벡터-2) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. 기벡1222 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제2-1	[미적분II]-다. 삼각함수-1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2211-2 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. 미적2212-1 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.
문제2-2	[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식 수학1322-2 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분II]-다. 삼각함수-1) 삼각함수의 뜻과 그래프 미적2211-2 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. 미적2212-1 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.
문제2-3	[수학I]-다. 도형의 방정식-2) 직선의 방정식 수학1322-2 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다. [미적분II]-다. 삼각함수-2) 삼각함수의 미분 미적2221-2 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [기하와 벡터]-나. 평면 벡터-2) 평면벡터의 성분과 내적 기벡1221 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. 기벡1222 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수	관련자료	재구성
고등학교 교과서	수학I	이강섭 외	MiraeN	2017	134, 153-163		
	수학I	김원경 외	비상교육	2017	127-134		
	미분적분학II	신항균 외	㈜지학사	2017	51-58, 74-79, 81-86		
	미분적분학II	김원경 외	비상교육	2017	45-53, 69-72, 75-80		
	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2017	53-55, 74-84		
	기하와 벡터	신항균 외	㈜지학사	2017	63-65, 81-96		

5. 문항 해설

본 문항의 핵심적인 내용은「수학II」의 ‘삼각함수’ 그리고「기하와 벡터」의 ‘평면벡터’의 단원에서 다루어진다. 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 문제가 요구하는 점들의 좌표를 구할 수 있으며, 그 결과 얻어지는 삼각함수들의 성질, 그리고 두 벡터의 내적과 두 벡터 사이의 각과의 연관성을 이용하여 두 벡터가 수직으로 만나는 각들을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 이런 방법으로 다루어진 결과들을 이용하여 실생활에서 나타나는 궁금증을 수학을 통하여 보여줄 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	시침과 분침이 1° 변할 때 각각 몇 분의 변환이 있는지 알고 있다. / 방정식으로 얻기 위하여 (*1), (*4) 또는 (*7)을 이용하였다. 정확히 사용하였다. (A) 하나 정도를 틀리게 사용하였다. (B) 전혀 사용하지 못하였다. (E)	A-5 B-3 E-0
	범위를 이용하여 구하는 시각을 찾을 수 있다. / 방정식을 이용해도 풀 수 있다. 정확하게 구하는 과정을 알고 있다. / 방정식을 완전히 풀었다. (A) 시간의 범위를 두 단계 정도 구하려고 노력하였다. / (*3), (*6) 또는 (*9)를 완전히 얻지 못했다. . (B) 시간의 범위를 한 단계 정도 구하려고 노력하였다. / 방정식 (*2), (*5) 또는 (*8)을 얻었다. (C) 시간의 범위를 구하는 시도를 하였다. (D) 아무런 시도도 하지 않았다. (E)	A-20 B-15 C-10 D-5 E-0
	구하는 시각을 구할 수 있다./ (*6) 또는 (*9)를 이용하여 결론을 얻을 수 있다. 있다. (A) 없다. (E)	A-5 E-0
문제 2-2	직각삼형의 넓이가 최대가 됨을 알고 있으며 구하는 값이 두 개 나오는 것을 안다. 모두 사실을 모두 알고 있다. (A) 둘 사실들 중에 하나만 안다. (C) 모두 모른다. (E)	A-5 C-3 E-0
	두 방정식을 각각 구할 수 있다. 두 방정식 모두를 완전히 풀었다. (A) 방정식 중 하나를 풀고 나머지를 하나의 방정식을 얻으려 노력했다. (B) 두 방정식을 얻으려 노력했다. (C) 아무런 시도도 하지 않았다. (E)	A-15 B-10 C-5 E-0
	구하는 시각을 정확히 구할 수 있다. 있다. (A) 없다. (E)	A-10 E-0
문제 2-3	삼각함수의 성질을 이용하여 점 A와 점 B의 좌표를 구할 수 있다. 정확한 x좌표와 y좌표를 구하였다. (A) 좌표 값 중 하나가 틀렸다. (B)	A-5 B-4 C-2 E-0

	점 B의 좌표를 구하는데 비율 $\frac{\theta}{12}$를 사용하지 못했다. /다른 방법 시도에서 (12)를 이용하였다. (C) 아무것도 구하지 못했다. (E)	
	내적의 정의와 벡터의 내적과 성분의 정리를 이용하여 (4)와 (5)를 올바르게 얻었다. 정확하게 모든 것을 구하였다. (A) 어느 값이든 하나가 틀린 것이 있다. (B) 등식을 얻지 못하였다. (C) 내적을 전혀 계산하지 못하였다. (D) 아무것도 하지 않았다. (E)	A-15 B-10 C-5 D-2 E-0
	(8)식을 올바르게 얻었다. 정확하게 모든 것을 구하였다. (A) 단순한 코사인함수의 형태로 만들지 못했다. (B) 코사인함수의 덧셈정리를 잘못 적용하여 다른 결과를 얻었다. (C) 코사인함수의 덧셈정리를 잘 모르고 계산하였다. /(13)을 구하였다. (D) 아무것도 하지 않았다. (E)	A-12 B-9 C-6 D-4 E-0
	90°, 즉 수직이 되는 조건으로 (11) 또는 (11-1)을 얻었다. 정확하게 모든 것을 구하였다. (A) θ의 값을 모두 구하지 못하였다. (B) $\cos\theta=0$의 값을 구하지 못한다. (C) 수직인 조건 $\cos\theta=0$를 얻지 못하였다. (D) 아무것도 하지 못하였다. (E)	A-8 B-6 C-4 D-2 E-0

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

7. 예시 답안

[문제 2-1]

<답안> 문제를 다루기 전 편리함을 위하여 다음의 몇 가지 항등식을 얻자.

(i) y축과 시침과 분침이 1° 변화량에 따라 각각 다음과 같이 변화한다.

$$\text{분침: } \frac{60}{360} = \frac{1}{6}\text{분}, \quad \text{시침: } \frac{60}{30} = 2\text{분}$$

(ii) 시침과 분침이 1분 변화량에 따라 각각 다음과 같이 변화한다.

$$\text{분침: } \frac{360}{60} = 6^\circ, \quad \text{시침: } \frac{1}{2}^\circ$$

처음 주어진 조건으로부터 범위를 정한다.

시침의 범위: 1시 ~ 2시, 시침과 y축 사이 대칭각의 범위: $30^\circ \sim 60^\circ$

분침의 범위: 40분 ~ 60분, 분침과 y축 사이 대칭각의 범위: $0^\circ \sim 120^\circ$

이 분침의 범위로부터

시침과 y축 사이 대칭각의 범위: $50^\circ \sim 60^\circ$

이 시침의 범위로부터 (분침의 변환 $50^\circ \to 50 + \dfrac{10}{6} = \dfrac{310}{6} \approx 51.67$분, $60^\circ \to 50$분)

분침의 범위: 50분 ~ 51.67분

이 분침의 범위로부터

(시침의 변환 50분 $\to (60 - \dfrac{1}{2} \times 10) = 55^\circ$, 51.67분 $\to 55 + \dfrac{10}{6} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{335}{6} = 55.83^\circ$)

시침과 y축 사이 대칭각의 범위: $55^\circ \sim 55.83^\circ$

이 시침의 범위로부터

(분침의 변환 $55^\circ \to 50.83$분, $55.83^\circ \to 50.83 + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6} \approx 50.83 + 0.42 = 51.25$분)

분침의 범위: 50.83분 ~ 51.25분

따라서 구하는 시각은 1시 51분이다.

<풀이 2> 1시로부터 $t\,(40 \le t \le 60)$분이 지났을 때 시침과 y축 사이의 각은 $\left(30 + \dfrac{1}{2}t\right)^\circ$ 가 되고, 분침과 y축 사이의 각은 $(360 - 6t)^\circ$ 가 된다. ....,,,,...... (*1)

대칭 형태를 이루기 위해서 이 두 각이 같아야 하므로 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$360 - 6t = 30 + \frac{1}{2}t \quad \text{...,,,...........(*2)}$$

이 식을 풀면

$$\frac{13}{2}t = 330 \Rightarrow t = \frac{660}{13} \approx 50.76 \quad \text{.......................................,...... (*3)}$$

을 얻는다. 따라서 구하는 시각은 1시 51분이다.

<풀이 3>과 <풀이 4>에서의 각은 양의 y축으로부터 시작하여 시계방향으로 선분 OA가 회전하는 양을 나타낸다.

<풀이 3> 1시 40분과 2시 사이에 시침과 y축 사이의 각을 θ_B라 하면 $50^\circ \le \theta_B \le 60^\circ$ 이다. 따라서 1시로부터 $t\,(40 \le t \le 60)$분이 지났을 때 시침과 y축 사이의 각은 $\left(30+\frac{1}{2}t\right)^\circ$ 가 된다. 분침과 y축 사이의 각을 θ_A 라 하면 $240^\circ \le \theta_A \le 360^\circ$ 이다. 따라서
1시로부터 $t\,(40 \le t \le 60)$분이 지났을 때 $6t^\circ$ 가 된다. .... (*4)
이 두 각이 같아야 하므로 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$6t = 30+\frac{1}{2}t \quad \text{.......................................(*5)}$$

이 식을 풀면

$$\frac{11}{2}t = 30 \Rightarrow\ t=\frac{60}{11} \quad \text{............................ (*6)}$$

을 얻는다. $40 < t < 60$이므로 구하는 시각은 없다.

<풀이 4> 1시 40분과 2시 사이에 시침과 y축 사이의 각을 θ_B라 하면 $50^\circ \le \theta_B \le 60^\circ$ 이다. 따라서 1시로부터 $t\,(40 \le t \le 60)$분이 지났을 때 $\left(30+\frac{1}{2}t\right)^\circ$ 가 된다. 또한 분침과 y축 사이의 각을 θ_A 라 하면 $240^\circ \le \theta_A \le 360^\circ$ 이다.
분침과 y축 사이의 각을 $(6t-180)^\circ$ 로 생각한 경우 .... (*7)
이 두 각이 같아야 하므로 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$6t-180 = 30+\frac{1}{2}t \quad \text{....................................(*8)}$$

이 식을 풀면

$$\frac{11}{2}t = 180+30 = 210\ \Rightarrow\ t=\frac{420}{11} \quad \text{.............,,,,,......... (*9)}$$

을 얻는다. $t > 40$이어야 하므로 구하는 시각은 없다.

[문제 2-2]

<답안> 다음 사실을 이용한다.
같은 꼭짓점을 갖는 두 선분의 끝점을 연결하여 얻은 삼각형은 직각삼각형일 때 넓이가 최대가 된다.

처음 주어진 조건으로부터 범위를 정한다.

시침의 범위: 4시 ~ 5시, 시침과 y축 사이의 범위: $135^\circ \sim 150^\circ$

분침의 범위: 0분 ~ 60분, 분침과 y축 사이의 범위: $0^\circ \sim 360^\circ$

<첫째> 분침이 12시와 6시 사이에 놓일 경우:

4시로부터 시간이 $t\,(0 \le t \le 30)$분이 지났을 때 시침과 y축 사이의 각은 $\left(120+\frac{1}{2}t\right)^\circ$가 되고, 분침과 y축 사이의 각은 $6t^\circ$가 된다. 이때 분침은 시침과 수직이 되므로 다음과 같은 방정식을 얻는다. (참고: 4시일 때 시침과 y축 사이의 각은 120°이다.)

$$6t = \left(120+\frac{1}{2}t\right) - 90 = 30+\frac{1}{2}t$$

이 식을 풀면

$$\frac{11}{2}t = 30 \Rightarrow t = \frac{60}{11} \approx 5.45$$

을 얻는다. 분침은 5.45분이 되고, 이를 소수점 아래 부분을 반올림하면 구하는 시각은 다음과 같다.

4시 5분

<둘째> 분침이 6시와 12시 사이에 놓일 경우

4시 30분으로부터 시간이 t분이 지났을 때 시침과 y축 사이의 각은 $\left(135+\frac{1}{2}t\right)^\circ$가 되고, 분침과 y축 사이의 각은 $6t^\circ$가 된다. 이때 분침은 시침과 수직이 되므로 다음과 같은 방정식을 얻는다. (참고: 4시 30분일 때 시침과 y축 사이의 각은 135°이다.)

$$180+6t = \left(135+\frac{1}{2}t\right) + 90 = 225+\frac{1}{2}t$$

이 식을 풀면

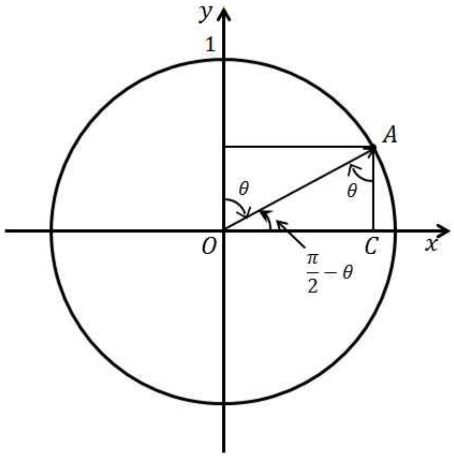
$$\frac{11}{2}t = 45 \Rightarrow t = \frac{90}{11} \approx 8.18$$

을 얻는다. 따라서 분침은 $30+8.18=38.18$분이 되고, 이를 소수점 아래 부분을 반올림하면 구하는 시각은 다음과 같다.

4시 38분

[문제 2-3]

<답안> 먼저 점 A의 좌표를 구하자.



위 그림으로부터 점 A의 x좌표와 y좌표는 각각 다음과 같다.

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

또는 직각삼각형 OAC와 각 ∠OAC를 θ로 놓고 선분 OC와 선분 AC의 길이를 각각 x좌표와 y좌표로 하여 곧바로 $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$를 얻을 수 있다.

y축과 선분 OB사이의 각은 $\frac{\theta}{12}$가 된다. 따라서 점 B의 x좌표와 y좌표는 각각 다음과 같다.

$$x = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{12}$$
$$y = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{12} \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

두 점 A와 B는 반지름이 각각 1과 $\frac{1}{2}$인 원 위에 놓이므로 크기는 각각 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, \quad |\overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots \quad (3)$$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 좌표는 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OA} = (\sin\theta, \cos\theta), \quad \overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{12}, \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{12}\right)$$

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$사이의 각이 t이므로 벡터의 내적에 따라 다음을 얻는다.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos t$$
$$= \frac{1}{2}\cos t \qquad \cdots\cdots \quad (4)$$

또한 벡터의 내적과 성분의 정리($\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$ 일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sin\theta\sin\frac{\theta}{12}+\frac{1}{2}\cos\theta\cos\frac{\theta}{12} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

(4)와 (5)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos t &= \frac{1}{2}\sin\theta\sin\frac{\theta}{12}+\frac{1}{2}\cos\theta\cos\frac{\theta}{12}\\ \cos t &= \sin\theta\sin\frac{\theta}{12}+\cos\theta\cos\frac{\theta}{12}\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

이를 간단히 하기 위하여 코사인함수의 덧셈정리

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

를 이용하면 구하는 $\cos t$의 값은 다음과 같다.

$$\cos t=\cos\left(\theta-\frac{\theta}{12}\right)=\cos\left(\frac{11}{12}\theta\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 사이의 각이 90°가 되는 t 값을 얻기 위하여

$$\cos(90^\circ)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

임을 이용하자. 즉

$$\cos\left(\frac{11}{12}\theta\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

을 만족하는 $\theta\,(0\le\theta\le 24\pi)$의 값을 구하면 된다.

$$\frac{11}{12}\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots,\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\ \ (n=0,1,\cdots,21,\ 0\le\theta\le 24\pi=4320^\circ) \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

위 식으로부터 θ를 구하면 다음과 같다.

$$\theta=\frac{6}{11}\pi,\ \frac{18}{11}\pi,\ \frac{30}{11}\pi,\ \cdots,\ \frac{258}{11}\pi=\frac{6+12n}{11}\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 21) \quad \cdots\cdots \quad (11\text{-}1)$$

(참고로 $n=5,16$일 때의 시각은 3시와 9시에 해당한다.)

<다른 방법 시도> 양의 y축으로부터 시작하여 시계방향으로 선분 OA가 회전하는 양을 나타내는 각이 θ이고 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 수직이 되는, 즉 사이의 각이 90°가 되어야 한다.

$$y\text{축과 선분 OB 사이의 각은 }\frac{\theta}{12} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

임을 이용하면, 우리는 다음을 얻는다.

$$\frac{\theta}{12}+t=\theta\Rightarrow t=\theta-\frac{\theta}{12}=\frac{11}{12}\theta\ \Rightarrow\cos t=\cos\left(\frac{11}{12}\theta\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

위의 풀이와 같이 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 사이의 각이 90°가 되는 t 값을 얻기 위하여

$$\cos(90^\circ)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

임을 이용하자. 즉

$$\cos\left(\frac{11}{12}\theta\right) = 0 \quad \text{...} \quad (10)$$

을 만족하는 $\theta\,(0 \le \theta \le 24\pi)$의 값을 구하면 된다.

$$\frac{11}{12}\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \cdots,\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi \ \ (n=0,1,\cdots,21\,,\ 0 \le \theta \le 24\pi = 4320^{\circ}\ ) \quad \text{.......} \quad (11)$$

위 식으로부터 θ를 구하면 다음과 같다.

$$\theta = \frac{6}{11}\pi,\ \frac{18}{11}\pi,\ \frac{30}{11}\pi,\ \cdots,\ \frac{258}{11}\pi = \frac{6+12n}{11}\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 21) \quad \text{........} \quad (11\text{-}1)$$