단국대학교 2026학년도 모의논술고사

의학계열 가이드 답안

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 함수의 극값을 계산할 수 있는지를 평가

〔논제 2〕 포물선의 개념과 내적의 개념을 이해하고 있는지를 평가

〔논제 3〕 타원의 접선을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 권오남 외(2025), 수학 II, (주)교학사, 88-95쪽
○ 김원경 외(2025), 미적분, 비상교육, 126-137쪽
○ 이준열 외(2025), 기하, 천재교육, 11-24쪽, 88-94쪽

□ 문항해설

〔논제 1〕 주어진 함수를 미분하여 극값을 계산할 수 있는지 평가하는 문제이다.

〔논제 2〕 포물선과 거리 관계로부터 발생하는 내적의 최댓값을 계산할 수 있는지 평가하는 문제이다.

〔논제 3〕 타원의 접선들이 이루는 관계로부터 적분 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.

□ 예시 답안

〔논제 1〕 함수 $v(x)=\frac{1}{\alpha}\left(x-\frac{1}{\alpha}+\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\times\frac{1}{\alpha x+1}\right)$ 에서

$$v'(x)=\frac{1}{\alpha}\left\{1-\frac{1+\alpha^2}{(\alpha x+1)^2}\right\}=0$$

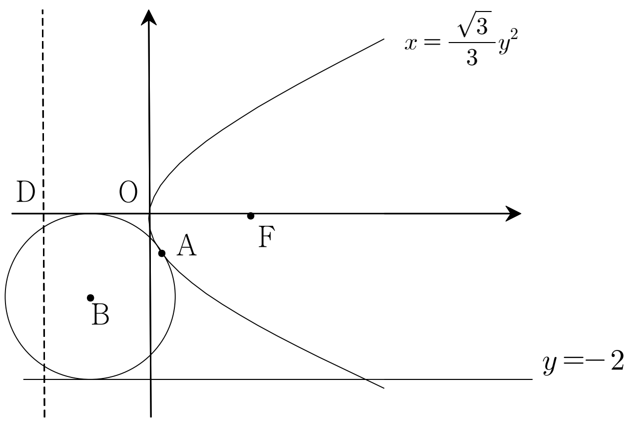
과 도함수 $v'(x)$의 부호의 변화를 조사하면 함수 $v(x)$는 $x_1=-\frac{1}{\alpha}+\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}$ 에서 극솟값 $v(x_1)=\frac{2}{\alpha^2}(\sqrt{\alpha^2+1}-1)$ 을 갖고, $x_2=-\frac{1}{\alpha}-\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}$ 에서 극댓값 $v(x_2)=-\frac{2}{\alpha^2}(\sqrt{\alpha^2+1}+1)$ 을 가짐을 알 수 있다. 또한

$$\lim_{x \to (-1/\alpha)+} v(x) = \infty \text{ 이고 } \lim_{x \to (-1/\alpha)-} v(x) = -\infty$$

이므로

$$\left\{ v(x) \middle| x\text{는 } x \neq -\frac{1}{\alpha}\text{인 모든 실수} \right\} = \left\{ y \middle| \; y \leq -\frac{2}{\alpha^2}\left(\sqrt{\alpha^2+1}+1\right) \text{ 또는 } y \geq \frac{2}{\alpha^2}\left(\sqrt{\alpha^2+1}-1\right) \right\}$$

〔논제 2〕 원 C의 중심을 $B(a, b)$라 하고, 원 C와 포물선 $y^2 = \sqrt{3}x$ 가 만나는 점을 $A(p, q)$ 라 하자. 조건 (3)에 의하여 $b = -3$ 또는 $b = -1$이고, 원 C 의 중심이 y축에 가장 가까운 것은 $b = -1$일 때이다. (아래 그림)



$f(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}y^2$ 이라 하고, $B(a, -1)$에서 포물선 위의 점 (x, y)까지의 거리의 제곱을 $\ell(y)$라 하면

$$\ell(y) = (a-x)^2 + (-1-y)^2 = (f(y)-a)^2 + (y+1)^2$$

에서 $\ell(y)$는 $y = q$에서 최솟값 1을 가지므로

$$1 = (f(q)-a)^2 + (q+1)^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

이고

$$0 = 2(f(q)-a)f'(q) + 2(q+1)$$

따라서

$$f(q) - a = -\frac{q+1}{f'(q)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (2)$$

를 식 (1)에 대입하면

$$(f'(q))^2 = (1+q)^2\left[(f'(q))^2 + 1\right]$$

방정식을 풀어 원 C 의 중심 B가 y축에 가장 가까운 해를 택하면 $q = -\frac{1}{2}$. 따라서 식 (2)에서 $a = -\frac{5}{12}\sqrt{3}$이다. 즉, 원의 중심은 $B\left(-\frac{5}{12}\sqrt{3}, -1\right)$.

한편

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{12}\sqrt{3}\right)+\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$

이고, 내적 $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$가 같은 방향일 때 가장 크므로, $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$의 최댓값은

$$|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos 0=|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 최댓값은 $\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

〔논제 3〕 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$라 하자. 직선 ℓ의 기울기를 m, 직선 ℓ'의 기울기를 m'이라 하면, 타원에 접하는 직선의 방정식

$$y=mx\pm\sqrt{2m^2+1}\,,\qquad y=m'x\pm\sqrt{2(m')^2+1}$$

으로부터

$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{\sqrt{2m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}},\qquad \overline{\mathrm{OS}}=\frac{\sqrt{2(m')^2+1}}{\sqrt{(m')^2+1}}$$

그러므로

$$(\overline{\mathrm{OR}}\times\overline{\mathrm{OS}})^2=\frac{4(mm')^2+2(m^2+m'^2)+1}{(mm')^2+m^2+m'^2+1}$$

탄젠트 함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (3)$$

따라서 $\tan\theta=\alpha$라 두면

$$m^2+m'^2=(m-m')^2+2mm'=\alpha^2(1+mm')^2+2mm'=\alpha^2(mm')^2+2(\alpha^2+1)mm'+\alpha^2$$

그러므로

$$\begin{aligned}(\overline{\mathrm{OR}}\times\overline{\mathrm{OS}})^2&=\frac{(2\alpha^2+4)(mm')^2+4(\alpha^2+1)mm'+2\alpha^2+1}{(1+\alpha^2)(mm'+1)^2}\\&=\frac{[2(\alpha^2+1)(mm')^2+4(\alpha^2+1)mm'+2(\alpha^2+1)]+2(mm')^2-1}{(1+\alpha^2)(mm'+1)^2}\\&=2+\frac{2}{(1+\alpha^2)}-\frac{4}{(1+\alpha^2)(mm'+1)}+\frac{1}{(1+\alpha^2)(mm'+1)^2}\end{aligned}$$

$\frac{1}{mm'+1}=u$, $\frac{1}{1+\alpha^2}=a$라 하면

$$(\overline{\mathrm{OR}}\times\overline{\mathrm{OS}})^2=2+2a-4au+au^2=a(u-2)^2-2a+2 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4)$$

이제 $u=\frac{1}{mm'+1}$의 범위를 구하자. 식 (3)은 $\pm\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}$과 같으므로

- $\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}$인 경우를 먼저 생각하자.

식을 m'을 m으로 정리하면 $m' = \frac{1}{\alpha} - \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\frac{1}{\alpha m+1}$. 따라서

$$\frac{1}{u} = mm'+1 = \frac{1}{\alpha}(m-m') = \frac{1}{\alpha}\left(m - \frac{1}{\alpha} + \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\frac{1}{\alpha m+1}\right)$$

〔논제 1〕의 함수 $v(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \frac{1}{\alpha} + \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\frac{1}{\alpha x+1}\right)$에 대한 결과를 이용하면

$$v(m) \le -\frac{2}{\alpha^2}(\sqrt{\alpha^2+1}+1) \quad \text{또는} \quad \frac{2}{\alpha^2}(\sqrt{\alpha^2+1}-1) \le v(m)$$

$u = \frac{1}{v(m)}$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{\alpha^2+1}-1}{2} \le u < 0 \quad \text{또는} \quad 0 < u \le \frac{\sqrt{\alpha^2+1}+1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

- $-\alpha = \frac{m-m'}{1+mm'}$인 경우

$$\frac{1}{u} = mm'+1 = -\frac{1}{\alpha}(m-m') = -\frac{1}{\alpha}\left(m + \frac{1}{\alpha} + \frac{1+\alpha^2}{\alpha}\frac{1}{\alpha m-1}\right) = v(-m)$$

이므로 이 경우에도 부등식 (5)가 성립한다.

따라서 식 (4)에서 $(\overline{\mathrm{OR}}\times\overline{\mathrm{OS}})^2$는 $u = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}+1}{2}$ 일 때 최솟값

$$f(\theta) = \frac{1}{4}a - \frac{3}{2}\sqrt{a} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta + \frac{9}{4}$$

을 갖는다. 결국

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} f(\theta)\sin\theta\, d\theta = -\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2}\left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}\right)dt = -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2}(t^2+9)\,dt$$

로부터 $A = -\frac{3}{16}$.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 삼차함수의 특성을 이해하고 있는지를 평가

〔논제 2〕 함수의 극값을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 권오남 외(2025), 수학 II, (주)교학사, 88-102쪽, 128-133쪽, 142-148쪽
○ 김원경 외(2025), 수학 I, 비상, 76-91쪽
○ 이준열 외(2025), 미적분, 천재교육, 112-117쪽, 139-171쪽

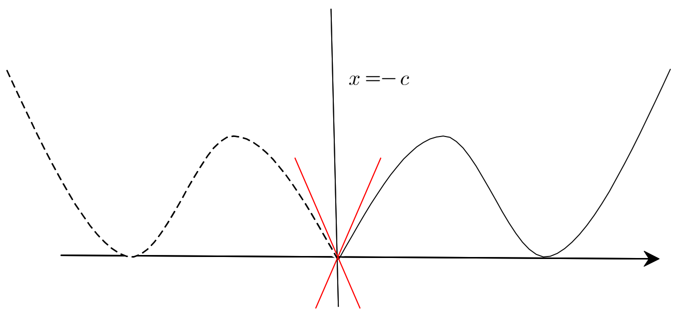
□ 문항해설

〔논제 1〕 삼차함수의 극값과 그래프의 성질을 이해하고 있는지 평가하는 문제이다.

〔논제 2〕 함수의 극값의 판별법과 정적분을 문제에 활용할 수 있는지 평가하는 문제이다.

□ 예시 답안

〔논제 1〕 $p(|x|)=\begin{cases} p(x) & (x \geq 0) \\ p(-x) & (x<0) \end{cases}$ 이고, $y=F(x)=p(|x+c|)$의 그래프는 $y=p(|x|)$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 $-c$만큼 평행이동한 것이므로, 조건 (1), (2)에 부합하는 $y=F(x)$의 그래프는 아래와 같다.



그림과 조건 (3)으로부터

$$a=-c \text{ 이고, } F(x)=(x+c)(x-2)^2 \ \ (x \ge -c)$$

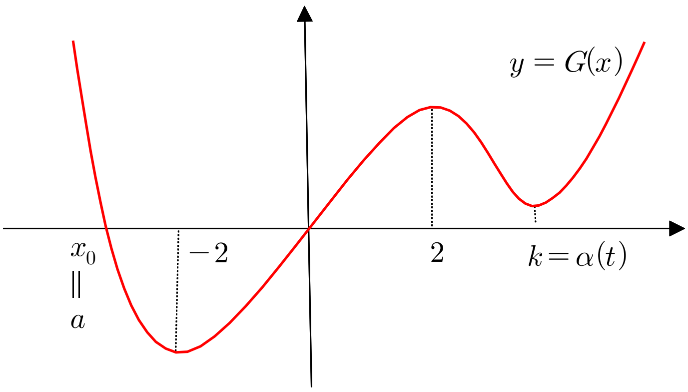
따라서

$$18=\lim_{x\to a+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}-\lim_{x\to a-}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=2\lim_{x\to a+}\frac{F(x)}{x+c}=2(2+c)^2$$

로 부터 $c=1$ 이고 $p(x)=x(x-3)^2$.

〔논제 2〕 $h(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는다고 하자. 도함수 $h'(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2x\,\alpha(tx)\int_0^x g(u)\,du$ 의 부호가 $x=0$의 좌우에서 변하지 않으므로, $h(x)$는 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다. 따라서 $a\neq 0$ 이다. $h'(a)=0$ 이고 $\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2a\,\alpha(ta)\neq 0$ 이므로 $\int_0^a g(u)\,du=0$.

- $k=\alpha(t)\ge 2$인 경우: 사차함수 $G(x)=\int_0^x g(u)\,du$는 구간 $(-2,2)$에서 증가하고 $G(0)=0$ 이므로, $G(-2)<0$ 이다. 따라서 사차함수 $G(x)$의 그래프의 개형에 의하여 방정식 $G(x)=0$은 $x_0<-2$ 인 해 x_0를 갖는다. (아래 그림)



$G(x)$의 부호는 $x=x_0$의 좌우에서 양에서 음으로 변하고, 함수 $tf'(tx)=\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2x\,\alpha(tx)$의 부호는 $x=x_0$의 좌우에서 변하지 않으므로, $h(x)$는 $x=x_0$에서 극값을 갖는다. $h(x)$는 오로지 $x=a$에서만 극값을 가지므로 $x_0=a$ 이고, $G(x)$의 극솟값 $G(k)$는 0보다 크거나 같다. 따라서

$$G(k)=\int_0^k (x^2-4)(x-k)\,dx = -\frac{k^4}{12}+2k^2 \ge 0$$

로부터 $k=\alpha(t)\le 2\sqrt{6}$

- $0<\alpha(t)<2$인 경우: 극솟값 $G(2)$가 0보다 크거나 같다. $G(2)=-4+\frac{16}{3}\alpha(t)\ge 0$에서 $\frac{3}{4}\le\alpha(t)$.

그러므로 연속함수 $\alpha(t)$는 모든 실수 t에 대하여 $\frac{3}{4}\le\alpha(t)\le 2\sqrt{6}$

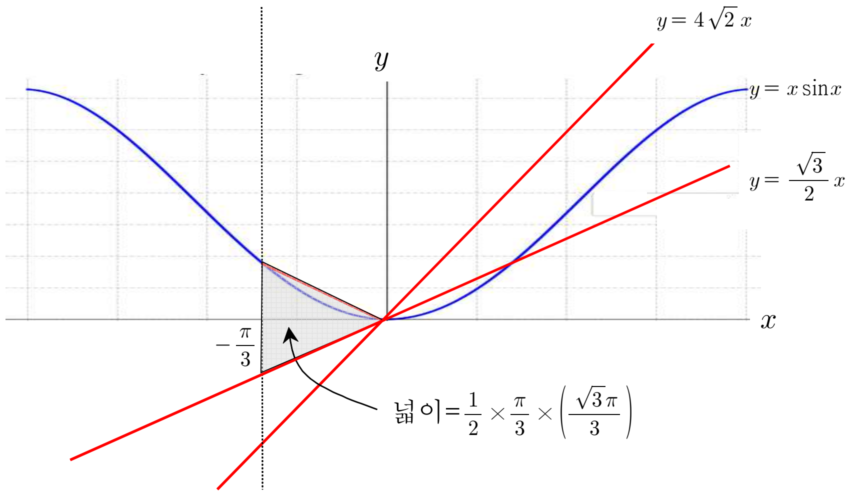
따라서

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x \le f'(x) \le 4\sqrt{2}x \ (x \ge 0) \quad \text{이고} \quad 4\sqrt{2}x \le f'(x) \le \frac{\sqrt{3}}{2}x \ (x<0) \qquad \cdots\cdots \ (1)$$

곡선 $y=x\sin x$가 y축에 대칭이므로

$$\int_0^{\pi/3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - x\sin x\right)dx = \int_{-\pi/3}^{0}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x - x\sin x\right)dx$$

따라서 곡선 $y=x\sin x$와 세 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 영역 S의 넓이는 아래 그림에서와 같이 세 직선 $x=-\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$로 둘러싸인 삼각형의 넓이인 $\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)$와 같다.



또한 함수 $y=f'(x)$의 그래프가 부등식 (1)을 만족하는 영역에 있으므로 두 곡선 $y=x\sin x$, $y=f'(x)$와 두 직선 $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역 S'은 영역 S를 포함하고, 영역 S'의 넓이가 영역 S의 넓이 $\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)$와 같으므로

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x & \left(-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}\right) \\ x\sin x & \left(\frac{\pi}{3} < x \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

이고, 따라서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 & \left(-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin x - x\cos x + C & \left(\frac{\pi}{3} < x \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}, \quad C = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$