단국대학교 2026학년도 모의논술고사

자연 계열 가이드 답안

단국대학교
DANKOOK UNIVERSITY

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 적분과 미분의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

〔논제 2〕 수열의 귀납적 정의를 활용할 수 있는지를 평가

〔논제 3〕 함수의 극값의 특성을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2024), 수학I, 비상교육, 145-147쪽
○ 류희찬 외(2023), 수학I, 천재교과서, 124-127쪽
○ 류희찬 외(2023), 수학II, 천재교과서, 122-128쪽
○ 박교식 외(2024), 미적분, 동아출판, 134-136쪽
○ 황선욱 외(2024), 미적분, 미래엔, 143-145쪽

□ 문항해설

〔논제 1〕 정적분과 부정적분과의 관계를 이용하여, 함수의 특성을 분석할 수 있는지를 측정하는 문제이다.

〔논제 2〕 수열의 귀납적 정의를 이용하여 처음 몇 개의 항과 이웃하는 항 사이의 관계식을 파악하는 문제이다.

〔논제 3〕 함수의 극값의 조건을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제이다.

□ 예시 답안

$\int_{x-\alpha}^{x} t\,g(t)\,dt = f(x)$ 의 양변을 x로 미분하면,

$$x\,g(x)-(x-\alpha)g(x-\alpha)= f'(x) = \alpha k\cos(kx) \quad \cdots \text{①}$$

〔논제 1〕 식 ①에 $x=0$ 을 대입하면 $\alpha g(-\alpha)=\alpha k$ 이고 $g(-\alpha)= -g(\alpha)=3\pi$ 이므로, $k=3\pi$ 이다.
식 ①에 $x=\alpha$ 를 대입하면 $\alpha g(\alpha)=3\pi\alpha\cos(3\pi\alpha)$이므로 $\cos(3\pi\alpha) = -1$이다. 따라서 $\alpha=\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}$

〔논제 2〕 $x_n = \frac{2\pi}{k}+n\alpha$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 라 하면 $x_n-\alpha=\frac{2\pi}{k}+(n-1)\alpha=x_{n-1}$ 이므로, 식 ①은

$$a_n-a_{n-1}=x_n g(x_n)-x_{n-1}g(x_{n-1})=\alpha k\cos(kx_n)$$

조건 $\alpha k=\pi$ 로부터, $a_n-a_{n-1} = \alpha k\cos(2\pi+n\alpha k) = \pi\cos(2\pi+n\pi) = (-1)^n\pi$
따라서

$$a_2=a_1+\pi,\ a_3=a_1,\ a_4=a_1+\pi,\ a_5=a_1,\cdots,\ a_{10}=a_1+\pi,\ a_{11}=a_1$$

에서 $a_{11}-a_2 = -\pi$

〔논제 3〕 $x-t = s$ 로 치환하면

$$h(x) = -f(x)+\int_0^x (2x-s)g(s)ds = -f(x)+2x\int_0^x g(s)ds-\int_0^x sg(s)ds$$

따라서

$$h'(x) = -\alpha k\cos(kx)+2\int_0^x g(s)\,ds + x\,g(x)$$

조건 $g(\alpha) = -\frac{\pi}{\alpha}$과 식 ①로부터

$$2\alpha\,g(2\alpha) = \alpha\,g(\alpha) + \alpha k\cos(2\alpha k) = -\pi+ \alpha k\cos(2\alpha k)$$

이고, $h(x)$가 $x=2\alpha$에서 극값을 가지므로

$$0=h'(2\alpha) = -\alpha k\cos(2\alpha k)+2\int_0^{2\alpha} g(s)\,ds + 2\alpha g(2\alpha)=2\int_0^{2\alpha} g(s)\,ds-\pi$$

그러므로 $\int_0^{2\alpha} g(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 함수의 미분가능성을 이해하고 있는지를 평가

〔논제 2〕 함수의 연속성을 이해하고, 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 홍성복 외(2024), 수학II, 지학사, 31-35쪽
○ 황선욱 외(2024), 미적분, 미래앤, 115-117쪽
○ 류희찬 외(2023). 수학II, 천재교과서, 52-57쪽

□ 문항해설

〔논제 1〕 정의역을 구간별로 나누어 각 구간에서 함수의 최솟값을 구하고, 미분 가능성을 판단하는 문제이다.

〔논제 2〕 그래프의 개형을 그리고 이를 이용하여 함수의 불연속점을 파악하는 문제이다.

□ 예시 답안

〔논제 1〕 실수 t의 구간을 $t<0$, $t \ge 2$, $0 \le t < 2$ 의 경우로 나누어 $g(t)$를 구하자.

(i) $t<0$일 때, $f(x)=xe^{2x}-e^{2x}+e^t$ 이고, $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2e^{2x}=e^{2x}(2x-1)$

따라서 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $g(t)=e^t-\dfrac{1}{2}e$ 를 갖는다.

(ii) $t \ge 2$일 때, $f(x)=xe^{2x}+e^{2x}-e^t$ 이고, $f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}+2e^{2x}=e^{2x}(2x+3)$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 $g(t)=1-e^t$ 을 갖는다.

(iii) $0 \le t < 2$일 때,

- 구간 $\dfrac{t}{2} \le x \le 1$ 에서 $f(x)$는 경우 (i)와 같이 최솟값 $e^t-\dfrac{1}{2}e$를 갖고,
- 구간 $0 \le x < \dfrac{t}{2}$ 에서 $f(x)$는 경우 (ii)와 같이 최솟값 $1-e^t$을 갖는다.

$e^t-\dfrac{1}{2}e$과 $1-e^t$의 크기 비교해 보자. $e^t-\dfrac{1}{2}e \ge 1-e^t$의 필요충분조건은 $t \ge \ln\left(\dfrac{2+e}{4}\right)$ 이므로,

$\alpha=\ln\left(\dfrac{2+e}{4}\right)$라 할 때, $0 \le t < \alpha$이면 $g(t)=e^t-\dfrac{1}{2}e$이고, $\alpha \le t < 2$이면 $g(t)=1-e^t$

그러므로 (i), (ii), (iii)에 의하여

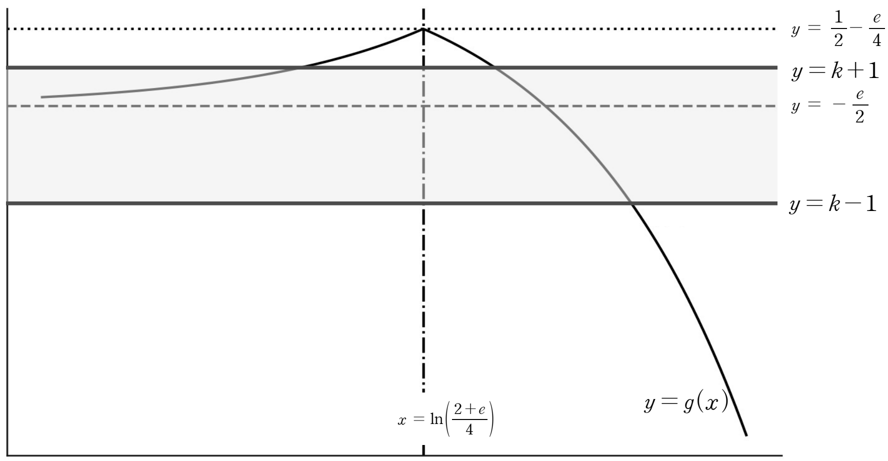
$$g(x)=\begin{cases} e^x-\dfrac{1}{2}e & x<\alpha \\ 1-e^x & x \ge \alpha \end{cases}$$

따라서

$$\lim_{\Delta x \to 0-}\frac{g(\alpha+\Delta x)-g(\alpha)}{\Delta x}=e^{\alpha},\quad \lim_{\Delta x \to 0+}\frac{g(\alpha+\Delta x)-g(\alpha)}{\Delta x}=-e^{\alpha}$$

로부터 함수 $g(x)$는 $x=\ln\left(\dfrac{2+e}{4}\right)$에서 미분가능하지 않다. 구하는 값: $\alpha=\ln\left(\dfrac{2+e}{4}\right)$

〔논제 2〕 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{g(x)-k\}^{2n}}=\begin{cases}0 & |g(x)-k|>1\\ \frac{1}{2} & |g(x)-k|=1\\ 1 & |g(x)-k|<1\end{cases}$ 이므로 $h(x)$가 불연속이 되는 x좌표는

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k+1$과의 교점의 x좌표나 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k-1$과의 교점의 x좌표와 같다. 따라서 $h(x)$가 불연속이 되는 x의 값이 3개인 경우는, 그림에서와 같이,

직선 $y=k+1$이 직선 $y=g\left(\ln\left(\frac{2+e}{4}\right)\right)$의 아래와 직선 $y=-\frac{e}{2}$의 위에 있을 때이다.

$g\left(\ln\left(\frac{2+e}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}-\frac{e}{4}$ 이므로 구하는 k의 값의 범위는 $-1-\frac{e}{2}<k<-\frac{1}{2}-\frac{e}{4}$

DKU

단국대학교