단국대학교 2025학년도 수시 모집 논술고사

자연 계열 문제 (오후)

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성명	

수험생 유의사항

1. 시험 시간은 120분이며, 고사 종료 시까지 퇴실할 수 없습니다(중도 퇴실할 경우 결시 처리).
2. 답안 작성란에 개인 정보(학교명, 성명 등)를 유출시킬 수 있는 불필요한 표시 등이 있는 경우 0점 처리되니 유의하시기 바랍니다.
3. 수험생 인적 사항과 답안은 반드시 **검정색 펜류**로 작성하시기 바랍니다. (빨간색이나 파란색 필기구, 연필, 샤프 사용 금지)
4. 답안지는 교체가 불가합니다. 원고지 교정 부호 또는 수정 테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
5. 답안은 반드시 정해진 답안 작성란 안에만 작성하시기 바랍니다.
6. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
7. 감독관의 지시 · 통제에 따르지 않는 경우 부정행위로 처리되며 즉시 퇴실 조치합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

문제 1 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

〈제시문〉

(가) 함수 $f(x)$ 가 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(나) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여

$a = g(\alpha)$ $b = g(\beta)$ 일 때 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[\, f(x)\,g(x) \,\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

(라) 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 정의되어 있다.

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재한다.

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이 아닐 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 불연속이라고 한다.

실수 t 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x^2 + |x - t|$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자.
사차함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고 $h(1) = 0,\ h(-1) \neq g(0)$ 이다.

[논제 1] $-\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2}$ 일 때, $g(t)$ 를 구하시오. (15점)

[논제 2] $\displaystyle\int_{-1}^{1} [\ln(|g'(t)| + 1)]^2\,dt$ 의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 실수 k 에 대하여, x 축에 평행한 직선 $y = k$ 와 곡선 $y = h(x)$ 의 교점의 개수를 $n(k)$ 라 하자.

함수 $n(k)$ 가 $k = 0$ 과 $k = 1$ 에서만 불연속일 때, $h(4)$ 의 값을 구하시오. (20점)

가이드 답안

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

■ 출제 의도

[논제 1] 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가
[논제 2] 치환적분법과 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가
[논제 3] 사차함수의 그래프에 대한 특성을 이해하고 있는지를 평가

■ 자료출처

- 류희찬 외(2024), 수학, 천재교과서, 70–74쪽
- 김원경 외(2024), 수학 Ⅱ, 비상교육, 51–67쪽, 78–89쪽
- 고성은 외(2024), 미적분, 좋은책신사고, 132–148쪽

■ 문항해설

[논제 1] 절댓값이 포함된 함수의 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제
[논제 2] 치환적분법과 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제
[논제 3] 사차함수의 그래프를 이용하여 극값의 위치를 파악할 수 있는지를 평가하는 문제

■ 예시 답안

[논제 1] $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ 이므로

- $x \geq t$ 이면 $f(x)=x^2+x-t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-t$ 는 $x=t$ 에서 최솟값 $f(t)=t^2$ 을 갖는다.
- $x \leq t$ 이면 $f(x)=x^2-x+t=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+t$ 는 $x=t$ 에서 최솟값 $f(t)=t^2$ 을 갖는다.

그러므로 두 경우 모두 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(t)=t^2$ 이다. 따라서 $g(t)=t^2$ 이다.

[논제 2] [논제 1]과 마찬가지 방법으로 $t \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

- $x \geq t$ 이면 $f(x)=x^2+x-t=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-t$ 의 최솟값은 $f(t)=t^2$,
- $x \leq t$ 이면 $f(x)=x^2-x+t=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+t$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=t-\frac{1}{4}$

$t^2 \geq t - \frac{1}{4}$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $t - \frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $g(t) = t - \frac{1}{4}$ 이다.

$t \leq -\frac{1}{2}$ 일 때, $-t \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $-t - \frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $g(t) = -t - \frac{1}{4}$ 이다.

정리하면

$$g(t) = \begin{cases} -t - \frac{1}{4} & \left(t \leq -\frac{1}{2}\right) \\ t^2 & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right) \\ t - \frac{1}{4} & \left(t \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \text{이고} \quad g'(t) = \begin{cases} -1 & \left(t \leq -\frac{1}{2}\right) \\ 2t & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(t \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

함수 $g'(t)$ 는 원점에 대칭이므로

$$\int_{-1}^{1} \{\ln(|g'(t)| + 1)\}^2 dt = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \{\ln(2t + 1)\}^2 dt + 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln 2)^2 dt$$

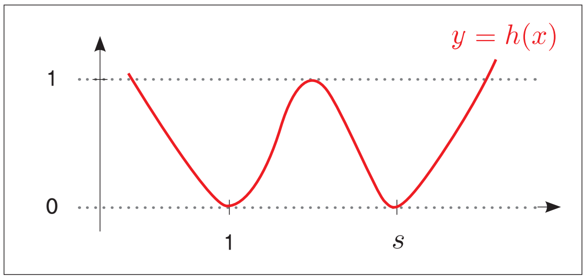
이다. 치환적분법과 부분적분법(2회)을 활용하면

$$2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \{\ln(2t + 1)\}^2 dt = \int_{1}^{2} (\ln u)^2 du = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

이므로

$$\int_{-1}^{1} \{\ln(|g'(t)| + 1)\}^2 dt = 3(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

[논제 3] 함수 $h(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 극값을 가지면 함수 $n(k)$ 는 $k = h(x_0)$ 에서 불연속이다. 사차함수의 그래프의 개형과 주어진 조건에 의하여 $h(x)$ 의 극값은 3 개이고, 세 극값 중 극솟값이 동일하다. (아래 그림)



$n(k)$ 가 특히, $k = 0$ 에서 불연속이고 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로

$$h(x) = (x-1)^2(x-s)^2$$

의 꼴이고 (s 는 상수), $h(x)$ 는 $x = \frac{s+1}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다. 또한 $n(k)$ 가 $k = 1$ 에서 불연속이므로 $h(x)$ 는 $x = \frac{s+1}{2}$ 에서 극댓값 1 을 갖는다. 따라서

$$h\left(\frac{s+1}{2}\right) = \left(\frac{s-1}{2}\right)^4 = 1$$

에서 $s = 3$ 또는 $s = -1$ 이다.

$h(-1) \neq g(0) = 0$ 이므로 $h(x) = (x-1)^2(x-3)^2$ 이고 $h(4) = 9$ 이다.

문제 2 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

〈제시문〉

(가) 함수 $y=f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ 를 만족시키는 0 이 아닌 상수 p 가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$ 를 주기함수라 하고 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.
(나) 함수 $f(x)$ 가 a, b 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분은 $\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

자연수 n 에 대하여, $2(n-1) \le x < 2n$ 일 때 $f(x)=\sin(n\pi x)$ 라 하자.

[논제 1] $\displaystyle\int_0^t f(x)\,dx=\frac{1}{6\pi}$ 을 만족시키는 실수 t 의 최댓값을 구하시오. (단, $0 \le t \le 6$) (20점)

[논제 2] 다음 조건을 만족시키는 실수 m 의 값의 범위를 구하시오. (25점)

$0 \le k \le m$ 이고 $\displaystyle\int_0^k f(x)\,dx=0$ 인 실수 k 의 개수가 18 이다.

가이드 답안

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

■ 출제 의도

[논제 1] 삼각함수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 정적분의 개념을 이해할 수 있는지를 평가

■ 자료출처

- 김원경 외(2024), 수학 I, 비상교육, 76–91쪽
- 박교식 외(2024), 수학 II, 동아출판, 122–125쪽
- 고성은 외(2024), 미적분, 좋은책신사고, 126–131쪽, 140–148쪽

■ 문항해설

[논제 1] 정적분을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식의 해를 구할 수 있는지를 평가하는 문제

[논제 2] 정적분의 개념을 이해하여 삼각함수의 문제에 활용할 수 있는지를 평가하는 문제

■ 예시 답안

[논제 1] 먼저 닫힌구간 $[4, 6]$에서 주어진 조건을 만족하는 t를 찾아보자.

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 0 \text{ 이므로 } \frac{1}{6\pi} = \int_0^t f(x)\,dx = \int_4^t \sin(3\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{3\pi}cos(3\pi x)\right]_4^t$$

즉, 닫힌구간 $[4, 6]$에서 $\cos 3\pi t = \frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값은

$$\frac{37}{9},\ \frac{41}{9},\ \frac{43}{9},\ \frac{47}{9},\ \frac{49}{9},\ \frac{53}{9}$$

이다. 그러므로 닫힌구간 $[0, 6]$에서 주어진 조건을 만족시키는 t의 최댓값은 $\frac{53}{9}$ 이다.

[논제 2] $0 \leq k < 2$ 이고 $\int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k \sin(\pi x)\,dx = 0$ 인 k 의 개수는 1,

$2 \leq k < 4$ 이고 $\int_0^k f(x)\,dx = \int_2^k \sin(2\pi x)\,dx = 0$ 인 k 의 개수는 2,

$4 \leq k < 6$ 이고 $\int_0^k f(x)\,dx = \int_4^k \sin(3\pi x)\,dx = 0$ 인 k 의 개수는 3,

$6 \leq k < 8$ 이고 $\int_0^k f(x)\,dx = \int_6^k \sin(4\pi x)\,dx = 0$ 인 k 의 개수는 4,

$8 \leq k < 10$ 이고 $\int_0^k f(x)\,dx = \int_8^k \sin(5\pi x)\,dx = 0$ 인 k 의 개수는 5

이므로 구간 $0 \leq k < 10$ 에서 $\int_0^k f(x)\,dx = 0$ 인 실수 k 의 개수는 15 이다. 따라서 $10 \leq k \leq m$ 일 때

$$\int_0^k f(x)\,dx = \int_{10}^k f(x)\,dx = 0$$

을 만족시키는 k 의 개수가 3 이어야 한다.

$$0 = \int_{10}^k f(x)\,dx = \int_{10}^k \sin 6\pi x\,dx = -\frac{1}{6\pi}\Big[\cos 6\pi x\Big]_{10}^k$$

이므로 $10 \leq k < 12$ 일 때 $\cos 6\pi k = 1$ 을 만족시키는 k 의 값을 모두 구하면

$$10,\ 10+\frac{1}{3},\ 10+\frac{2}{3},\ 11,\ 11+\frac{1}{3},\ 11+\frac{2}{3}$$

이다. 따라서 구간 $10 \leq k \leq m$ 인 k 가 3 개뿐이기 위한 m 의 값의 범위는 $\frac{32}{3} \leq m < 11$ 이다.