자연 계열 문제 (오전)

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성명	

수험생 유의사항

1. 시험 시간은 120분이며, 고사 종료 시까지 퇴실할 수 없습니다(중도 퇴실할 경우 결시 처리).
2. 답안 작성란에 개인 정보(학교명, 성명 등)를 유출시킬 수 있는 불필요한 표시 등이 있는 경우 0점 처리되니 유의하시기 바랍니다.
3. 수험생 인적 사항과 답안은 반드시 **검정색 펜류**로 작성하시기 바랍니다. (빨간색이나 파란색 필기구, 연필, 샤프 사용 금지)
4. 답안지는 교체가 불가합니다. 원고지 교정 부호 또는 수정 테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
5. 답안은 반드시 정해진 답안 작성란 안에만 작성하시기 바랍니다.
6. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
7. 감독관의 지시 · 통제에 따르지 않는 경우 부정행위로 처리되며 즉시 퇴실 조치합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

문제 1 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

〈제시문〉

(가) 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$ 가 연속일 때 $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
(나) 두 직선 $y = mx + n,\ y = m'x + n'$ 에 대하여 두 직선이 서로 수직이면 $mm' = -1$ 이다.
(다) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

최고차항의 계수가 양수 a 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ 는 $x = -2, 0, 2$ 에서 극값을 갖는다.

[논제 1] $\int_0^2 f(t)\,dt = -2 - g(0)$ 일 때, $g(-2)$ 의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] 두 직선 ℓ 과 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 직선 ℓ 은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(1, f(1))$ 에서의 접선이다.
(2) 직선 ℓ 과 m 은 점 $A(1, f(1))$ 에서 만나고 서로 수직이다.

직선 m 의 x 절편이 13 일 때, a 의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 좌표평면 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 점 P 는 x 축 위에 있다. (단, 점 P 의 x 좌표는 양수)
(2) 곡선 $y = f(x)$ 의 접선 중 점 P 를 지나는 접선은 두 직선 ℓ', m' 뿐이다.

직선 ℓ' 과 m' 이 서로 수직일 때, a 의 값을 구하시오. (20점)

가이드 답안

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

■ 출제 의도

[논제 1] 정적분 기본 성질을 이해하고 있는지를 평가
[논제 2] 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가
[논제 3] 삼차함수의 접선의 성질을 이해하고 있는지를 평가

■ 자료출처

- 박교식 외(2024), 수학 Ⅱ, 동아출판, 126–131쪽
- 배종숙 외(2024), 수학, 금성출판사, 131–133쪽
- 박교식 외(2024), 미적분, 동아출판, 101–103쪽

■ 문항해설

[논제 1] 대칭성을 가지고 있는 함수의 정적분을 구할 수 있는지를 평가하는 문제
[논제 2] 함수의 접선과 직선과의 위치 관계를 알고 있는지를 평가하는 문제
[논제 3] 삼차함수의 그래프에 접하는 직선에 대한 성질을 이해하고 있는지를 평가하는 문제

■ 예시 답안

[논제 1] 삼차함수 $f(x) = ax(x^2-4)$ 가 원점에 대칭이므로

$$-2-g(0) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^{-2} f(t)\,dt = \int_1^{-2} f(t)\,dt - \int_1^0 f(t)\,dt = g(-2) - g(0)$$

따라서 $g(-2) = -2$ 이다.

[논제 2] $f(x) = ax(x^2-4) = ax^3-4ax$ 이므로 $f'(x) = 3ax^2-4a$ 이고 $f'(1) = -a$ 이다.

따라서 직선 m 은 점 A 를 지나고 직선 ℓ 에 수직이므로 직선 m 의 방정식은

$y = \dfrac{1}{a}(x-1) - 3a$ 이다. 직선 m 이 점 $(13, 0)$ 을 지나고 a 가 양수이므로 $a = 2$ 이다.

[논제 3] 곡선 $y = f(x)$ 위의 각 점에서 접선을 그어서 x 절편을 살펴보면, 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이 x 축 위에 있으므로, 주어진 조건 (2)를 만족시키는 점 P 는 오로지 $P(2,0)$ 뿐이고 이 경우 두 접선 중 하나는 점 P 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접한다.

곡선 $y = f(x)$ 와 점 P 에서 접하는 직선을 ℓ' 이라 하고, 점 P 를 지나고 곡선 $y = f(x)$ 와 점 P 가 아닌 점 $B(b, f(b))$ 에서 접하는 직선을 m' 이라 하자. 직선 m' 의 방정식은

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) = (3ab^2 - 4a)(x-b) + ab^3 - 4ab$$

이고, 직선 m' 은 점 $P(2,0)$ 을 지나므로

$$6ab^2 - 2ab^3 - 8a = 0$$

이다.

$$(b+1)(b-2)^2 = 0$$

에서 $b = -1$, $b = 2$. $b \neq 2$ 이므로 $b = -1$. 즉, 점 $B(-1, f(-1))$ 에서 직선 m' 과 곡선 $y = f(x)$ 는 접한다. 두 접선 ℓ', m' 은 서로 수직이므로

$$-1 = f'(-1)\, f'(2) = (3a - 4a)\,(12a - 4a)$$

이고 a 가 양수이므로 $a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

NOTE

문제 2 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

〈제시문〉

(가) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ (단, C 는 적분상수)

(나) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여

$a = g(\alpha), b = g(\beta)$ 일 때 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서

- $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$
- $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$

$f(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ 라 하자.

[논제 1] $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ 에 대하여

$$\int_0^a \frac{2\sin x+1}{2\cos x+\sin x\cos x}\,dx = 1$$

일 때, $f(a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수) (20점)

[논제 2] 다음 조건을 만족시키는 실수 k 의 값과 범위를 모두 구하시오. (25점)

> $\dfrac{\pi}{2} \le x \le 2\pi$ 에서
>
> 곡선 $y = |3f(x) - k|$ 와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 개수는 2 이다.

가이드 답안

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

■ 출제 의도

[논제 1] 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 그래프의 개형을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

■ 자료출처

- 고성은 외(2024), 수학 I, 좋은책신사고, 26–31쪽
- 박교식 외(2024), 미적분, 동아출판, 134–139쪽
- 김원경 외(2024), 수학 I, 비상교육, 74–80쪽

■ 문항해설

[논제 1] 치환적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제

[논제 2] 함수의 그래프 개형을 그려서 곡선과 직선의 위치 관계를 판단할 수 있는지를 평가하는 문제

■ 예시 답안

[논제 1] 치환적분법에 의하여

$$1=\int_0^a \frac{2\sin x+1}{2\cos x+\sin x\cos x}\,dx=\int_0^a \frac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}\times\frac{2+\sin x}{\cos x}\,dx=-\int_0^a \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$=\left[-\ln|f(x)|\right]_0^a=\ln\frac{|f(0)|}{|f(a)|}$$

이다. 따라서 $f(a)=\dfrac{1}{2e}$ 이다.

(별해1)

$$1=\int_0^a \frac{2\sin x+1}{2\cos x+\sin x\cos x}\,dx=\int_0^a \frac{\sin x(2+\sin x)+1-\sin^2 x}{2\cos x+\sin x\cos x}\,dx=\int_0^a \tan x\,dx+\int_0^a \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx$$

$$=\ln\frac{1}{2f(a)}$$

(별해2)

$$1=\int_0^a \frac{2\sin x+1}{2\cos x+\sin x\cos x}dx=\int_0^a \frac{(2\sin x+1)\cos x}{\cos^2 x(2+\sin x)}dx$$ 에서 $\sin x = t$ 로 치환하면

$\ln\frac{1}{2f(a)}=1$ 이다.

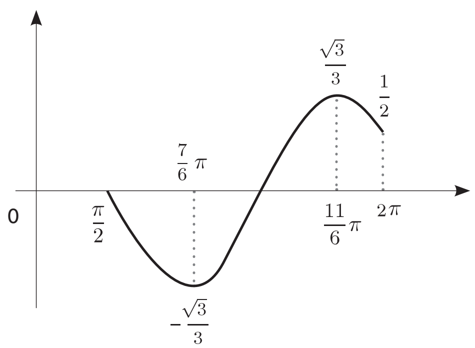
[논제 2] 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 구하자.

$$f'(x)=\frac{-(2+\sin x)\sin x-\cos^2 x}{(2+\sin x)^2}=-\frac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}=0$$

으로부터 $x=\frac{7}{6}\pi$ 일 때 극솟값 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 갖고, $x=\frac{11}{6}\pi$ 일 때 극댓값 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 갖는다. 또한

- $f'(x)>0$ 인 경우 : $2\sin x+1<0$, 즉 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi$ 에서 $f(x)$는 증가
- $f'(x)<0$ 인 경우 : $2\sin x+1>0$, 즉 $\frac{\pi}{2}\le x<\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi<x\le 2\pi$ 에서 $f(x)$는 감소

한다. 이를 이용하여 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



곡선 $y = f(x)$의 개형

$|3f(x)-k| = 1$은, $f(x)=\frac{k-1}{3}$, $f(x)=\frac{k+1}{3}$ 이므로 곡선 $y=|3f(x)-k|$와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수가 2 인 경우는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{k-1}{3}$ 의 교점과 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{k+1}{3}$ 의 교점의 합이 2 인 경우와 같다.

두 직선 $y=\frac{k-1}{3}$ 와 $y=\frac{k+1}{3}$ 의 거리 d 가 $\frac{2}{3}$ 이고 $d=\frac{2}{3}>\frac{\sqrt{3}}{3}$, $d=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$ 임에 주목하여 두 직선 $y=\frac{k-1}{3}$ 와 $y=\frac{k+1}{3}$ 을 동시에 움직이면서 교점의 개수의 합이 2 인 경우를 살펴보면 구하는 k 의 값의 범위는

(i) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{k+1}{3} \le 0$ 경우 : $-1-\sqrt{3} < k \le -1$

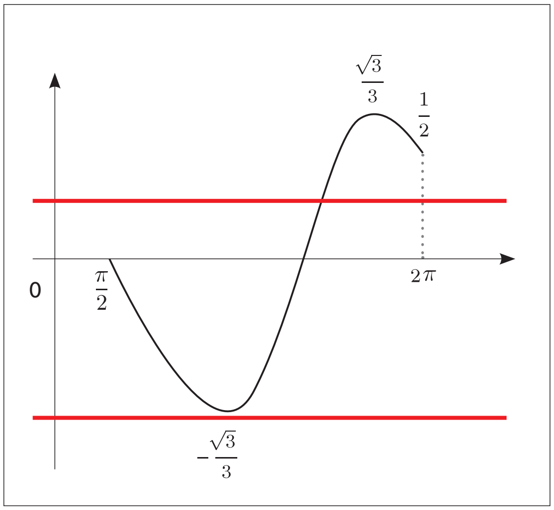
(ii) $\frac{k-1}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 경우 : $k = 1-\sqrt{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} < \frac{k-1}{3} \le 0$ 인 경우 : $-1+\sqrt{3} < k \le 1$

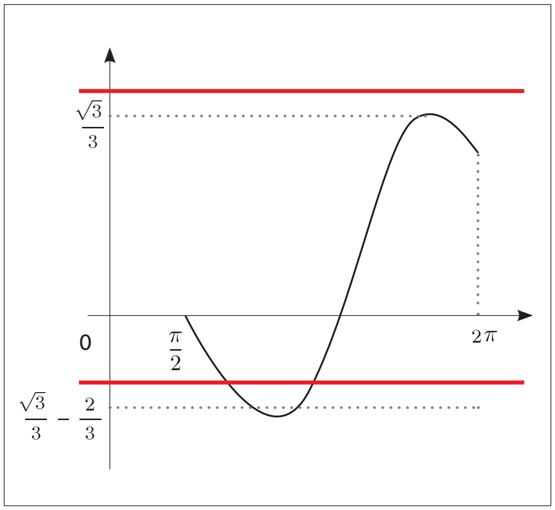
(iv) $\frac{1}{2} \le \frac{k-1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 경우 : $\frac{5}{2} \le k < 1+\sqrt{3}$

이다. 요약하면

$$-1-\sqrt{3} < k \le -1, \quad 1-\sqrt{3}, \quad -1+\sqrt{3} < k \le 1, \quad \frac{5}{2} \le k < 1+\sqrt{3}$$



경우 (ii)의 예



경우 (iii)의 예