단국대학교 2022학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오후)

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 역함수의 미분법을 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 극한을 이해하고 있는지를 평가

[논제 3] 극값을 판정하고 치환적분을 할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 홍성복 외(2020), 미적분, 102-103쪽
○ 이준열 외(2020), 수학 II, 12-13쪽, 60-68쪽, 83-89쪽
○ 고성은 외(2020), 미적분, 132-134쪽

[논제 1 평가기준]
- $a=-4$를 제시 : 5점
- $b=\frac{5}{2}+\ln 2$를 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- $g(x)=(x-2)^2(x+r)$를 제시 : 5점
- $c=-1$을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]
- 극값을 갖는 $k^{-1}(\pi t)$의 값을 제시 : 5점
- $\alpha=\frac{13}{2}+\frac{1}{\pi}$, $\beta=\frac{15}{2}-\frac{1}{\pi}$을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] $f^{-1}(x)=y$라 하면 $f(p)=1$인 양의 실수 p가 존재하여

$$\lim_{x\to 1}\left((f^{-1})'(x)\times\left\{\ln\frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(1)}\right\}^2\right)=\lim_{y\to p}\left\{\frac{1}{f'(y)}\times\left(\ln\frac{y}{p}\right)^2\right\}=L\neq 0$$

을 만족시킨다. $\lim_{y\to p}\ln\frac{y}{p}=0$이므로 주어진 극한이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는

$$\lim_{y\to p}f'(y)=f'(p)=0$$

이다. 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 모든 양수 x에서 $f'(x)\ge 0$이거나 모든 양수 x에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다. 그런데 $f'(x)=\frac{1}{x}+4x+a$에서 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$이므로 모든 양수 x에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다. $f'(p)=0$이므로 $f'(p)$는 $f'(x)$의 최솟값이다. 따라서 $f''(p)=-\frac{1}{p^2}+4=0$이므로 $p=\frac{1}{2}$이다.

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2+2+a=0$이므로 $a=-4$이다. 또한 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2+b=1$이므로 $b=\frac{5}{2}+\ln 2$이다.

$$L=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{f'(y)}\times\left(\ln\frac{y}{p}\right)^2\right\}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\frac{\left(\ln y-\ln\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{y}+4y-4}=\lim_{y\to\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{\ln y-\ln\frac{1}{2}}{y-\frac{1}{2}}\right)^2\times\frac{y}{4}\right\}=\frac{1}{2}$$

이므로 $a+b+L=-1+\ln 2$이다.

[논제 2] 조건 (1)에서 $\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{g'(x)}{g(x)}=2$이므로 $g(2)=0$이다. 따라서 $1\le k\le 3$인 자연수 k와 $p(2)\ne 0$인 $(3-k)$차 다항식 $p(x)$에 대하여

$$g(x)=(x-2)^k p(x)$$

$g'(x)=k(x-2)^{k-1}p(x)+(x-2)^k p'(x)$로부터

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left\{(x-2)\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}&=\lim_{x\to 2}\left\{(x-2)\frac{k(x-2)^{k-1}p(x)+(x-2)^k p'(x)}{(x-2)^k p(x)}\right\}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{kp(x)+(x-2)p'(x)}{p(x)}\\&=k\end{aligned}$$

이고 $k=2$이다. 따라서 상수 $r\ (r\ne -2)$에 대하여

$$g(x)=(x-2)^2(x+r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (\star)$$

그러므로

$$h(|x|)=\frac{3|x|+2r-2}{|x|+r}=\begin{cases}\frac{3x+2r-2}{x+r}, & x\ge 0\\ \frac{-3x+2r-2}{-x+r}, & x<0\end{cases}$$

이고 조건 (2)에 의하여 $c=r\,(c<0)$ 또는 $c=-r\,(c>0)$이어야 한다. 따라서 $r<0$이어야 한다. 그런데 $c=-r$이면 $g(c)=0$이 되므로 조건 (3)에 모순이다. 따라서 $c=r(r<0,\ \ r\ne -2)$이다.

$$g(c)=g(r)=(r-2)^2(2r)=18r$$

로부터 $c=r=-1$이고

$$g(x)=(x-2)^2(x-1)$$

그러므로 $g(2c)=g(-2)=-48$

(참고) $(\star)$은 다음과 같은 방법으로도 설명할 수 있다.

조건 (1)로부터 $g(2)=0$이다. 따라서 2차 다항식 $p(x)$에 대하여 $g(x)=(x-2)p(x)$이다.

$$\lim_{x\to 2}h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)p(x)+(x-2)^2p'(x)}{(x-2)p(x)}$$

이므로, $p(2)\ne 0$이면 위의 극한값이 1이 되어 조건 (1)에 맞지 않는다.

따라서 $p(2)=0$ 이고 1차 다항식 $q(x)$에 대하여 $g(x)=(x-2)^2q(x)$ 이다.

$$\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)^2q(x)+(x-2)^3q'(x)}{(x-2)^2q(x)}$$

이고 $q(2)=0$ 이면 위의 극한값은 3이 되어 조건 (1)에 맞지 않는다.

그러므로 $g(x)=(x-2)^2(x+r)$, $(r\neq -2)$이다.

[논제 3] 함수 $F(t)$ 를 미분하면,

$$F'(t)=\pi\cos(k^{-1}(\pi t)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (**)$$

그런데 $k'(x)=1+\cos x\geq 0$ 이므로 함수 $k(x)$ 는 증가함수이고 $k^{-1}(x)$ 도 증가함수이다. 따라서 $t\in(0,8)$ 이면 $k^{-1}(\pi t)\in(0,8\pi)$ 이므로 (**)에서

$$k^{-1}(\pi t)=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2},\frac{13\pi}{2},\frac{15\pi}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (***)$$

일 때 $F'(t)=0$ 이다. 또한,

$$F''(t)=-\pi\sin(k^{-1}(\pi t))\frac{d}{dt}k^{-1}(\pi t)$$

여기에서 $k^{-1}(\pi t)=x$ 라 하면 $\pi t=k(x)=x+\sin x$, 즉, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\pi}(1+\cos x)$ 이므로

$\dfrac{d}{dt}k^{-1}(\pi t)=\dfrac{\pi}{1+\cos(k^{-1}(\pi t))}$ 이다. 따라서

$$F''(t)=-\frac{\pi^2\sin(k^{-1}(\pi t))}{1+\cos(k^{-1}(\pi t))}$$

여기에서 (***)를 만족시키는 t 에서는

$$\cos(k^{-1}(\pi t))=0$$

$$\sin(k^{-1}(\pi t))=\begin{cases}1, & k^{-1}(\pi t)=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2},\dfrac{13\pi}{2}\\ -1, & k^{-1}(\pi t)=\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{11\pi}{2},\dfrac{15\pi}{2}\end{cases}$$

여기에서 $k^{-1}(\pi t)=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{9\pi}{2},\dfrac{13\pi}{2}$ 이면 $F''(t)<0$ 이므로 함수 $F(t)$ 는 극댓값을 갖고,

$k^{-1}(\pi t)=\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{2},\dfrac{11\pi}{2},\dfrac{15\pi}{2}$ 이면 $F''(t)>0$ 이므로 함수 $F(t)$는 극솟값을 갖는다.

그런데 $k^{-1}(\pi t)$ 는 t 의 증가함수이므로

$$\alpha=\frac{1}{\pi}k\left(\frac{13\pi}{2}\right)=\frac{13}{2}+\frac{1}{\pi}, \qquad \beta=\frac{1}{\pi}k\left(\frac{15\pi}{2}\right)=\frac{15}{2}-\frac{1}{\pi}$$

따라서

$$F(\beta)-F(\alpha)=F\left(\frac{15}{2}-\frac{1}{\pi}\right)-F\left(\frac{13}{2}+\frac{1}{\pi}\right)=\int_{\frac{13}{2}\pi+1}^{\frac{15}{2}\pi-1}\cos(k^{-1}(y))dy$$

여기에서 $k^{-1}(y)=x$ 로 치환하면 $y=k(x)=x+\sin x$ 이므로

$k\left(\dfrac{13}{2}\pi\right)=\dfrac{13}{2}\pi+1$, $k\left(\dfrac{15}{2}\pi\right)=\dfrac{15}{2}\pi-1$, $dy=(1+\cos x)dx$ 에서

$$F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\frac{13}{2}\pi}^{\frac{15}{2}\pi}\cos x\,(1+\cos x)dx=\int_{\frac{13}{2}\pi}^{\frac{15}{2}\pi}\left(\cos x+\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}-2$$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 매개변수를 이해하고 극값을 판정할 수 있는지를 평가

[논제 2] 정적분의 성질과 부분적분법을 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

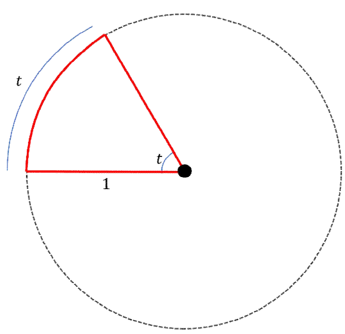
○ 고성은 외(2020), 미적분, 85-86쪽, 137-139쪽
○ 박교식 외(2020), 미적분, 91-93쪽, 140-145쪽
○ 최부림 외(2020), 수학 II, 83-96쪽

[논제 1 평가기준]
- $\ell(t)$를 제시 : 5점
- $A(t)$를 제시 : 5점
- $a=64\pi$임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 점 Q를 제시 : 7점
- $f(t)$를 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] 반지름이 1이므로, 호의 길이가 t이면 중심각은 t이다.
실수 $t \geq 0$에 대하여 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$의 좌표는



$\mathrm{P}_1(-\sin t,\ 2+\cos t)$ .... $(\star)$
$\mathrm{P}_2(-2-\cos t,\ -\sin t)$
$\mathrm{P}_3(\sin t,\ -2-\cos t)$
$\mathrm{P}_4(2+\cos t,\ \sin t)$

이므로 $(\ell(t))^2=(-2\sin t)^2+(4+2\cos t)^2=20+16\cos t$ 이다.
그러므로

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((\ell(t))^2-20)^2dt=256\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=128\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=64\pi$$

한편

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4}=\sqrt{(-\sin t+2+\cos t)^2+(2+\cos t+\sin t)^2}=\sqrt{10+8\cos t}$$

이므로 사각형 $P_1P_2P_3P_4$는 모든 변의 길이가 $\sqrt{10+8\cos t}$이고 두 대각선은 서로를 수직 이등분한다. 또한 마찬가지 방법으로 두 대각선의 길이는

$$\overline{P_1P_3}=\overline{P_2P_4}=\sqrt{20+16\cos t}$$

로 같으므로 사각형 $P_1P_2P_3P_4$는 정사각형이다. 따라서 $A(t)=10+8\cos t$이고 $A(t)$는 미분가능한 함수이다. $A'(t)=-8\sin t=0$에서 $t=\pi, 2\pi, \cdots, 63\pi$이다. 각 점의 좌우에서 $A'(t)$의 부호가 바뀌므로, $A(t)$의 극값은

$$A(t)=\begin{cases}18, & t=2\pi,\ 4\pi,\ \cdots,\ 62\pi\\ 2, & t=\pi,\ 3\pi,\ \cdots,\ 63\pi\end{cases}$$

그러므로 구간 $0<t<64\pi$에서의 함수 $A(t)$의 모든 극값의 합은 $18\times31+2\times32=622$이다.

[논제 2] 모든 $0\le t\le\frac{3}{2}\pi$에 대하여 점 Q의 좌표는

$$\begin{cases}Q\left(\frac{3\pi}{2},-t\right), & 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ Q\left(2\pi-t,-\frac{\pi}{2}\right), & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi\\ Q\left(\pi,t-\frac{3\pi}{2}\right), & \pi\le t\le\frac{3\pi}{2}\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (**)$$

그러므로, (*)과 (**)을 이용하면 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 0\le t\le\frac{\pi}{2}\\ -\frac{1}{3}t+\frac{2\pi}{3}, & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi\\ \frac{\pi}{3}, & \pi\le t\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

따라서,

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}A(t)(f(t))^2dt-10\int_0^{\pi}(f(t))^2dt\\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}A(t)(f(t))^2dt+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}A(t)(f(t))^2dt-10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(t))^2dt-10\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(t))^2dt\\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}A(t)(f(t))^2dt-10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(t))^2dt+\frac{\pi^2}{9}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(10+8\cos t)dt-\frac{5}{4}\pi^3\end{aligned}$$

먼저

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}A(t)(f(t))^2dt-10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(t))^2dt\\ &=\frac{8}{9}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(t-2\pi)^2\cos t\,dt\\ &=\frac{8}{9}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(t^2-4\pi t+4\pi^2)\cos t\,dt\end{aligned}$$

여기서,

$$\int t^2\cos t\,dt=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+c_1,\qquad \int t\cos t\,dt=t\sin t+\cos t+c_2$$

이므로 (c_1, c_2는 적분상수)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} A(t)(f(t))^2dt - 10\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(f(t))^2dt$$
$$= \frac{8}{9}\left[t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{32\pi}{9}\left[t\sin t + \cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{32\pi^2}{9}\left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\pi - 2\pi^2$$

또한

$$\frac{\pi^2}{9}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(10+8\cos t)dt = \frac{\pi^2}{9}\left(5\pi + 8\left[\sin t\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{5}{9}\pi^3 - \frac{8}{9}\pi^2$$

그러므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2dt - 10\int_{0}^{\pi}(f(t))^2dt = \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\pi - 2\pi^2 + \frac{5}{9}\pi^3 - \frac{8}{9}\pi^2 - \frac{5}{4}\pi^3$$
$$= \frac{16}{9} + \frac{16}{9}\pi - \frac{26}{9}\pi^2 - \frac{25}{36}\pi^3$$