단국대학교 2022학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제
(오후)

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성 명	

☑ 수험생 유의사항

1. 시험시간은 120분이며, 고사 종료시까지 퇴실할 수 없습니다. (중도퇴실할 경우 결시처리)
2. 문제번호와 답안번호가 반드시 일치하여야 합니다. (일치하지 않을 경우 0점 처리됨)
3. 문제별 답안작성란을 벗어나지 않게 작성하여야 합니다.
4. 답안 작성 시 인적사항 등 답안과 관련 없는 내용을 작성한 경우 0점처리 됩니다.
5. 답안은 반드시 **검정색 필기구**로 작성하시기 바랍니다.
   (연필, 샤프, 빨간색이나 파란색 필기구 사용금지)
6. 답안지는 교체가 불가하오니 원고지 교정부호 또는 수정테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
7. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
8. 휴대폰 등 전자기기는 전원을 끄고 비닐백에 넣어 좌석 아래에 보관하시기 바랍니다. 고사 중에 벨소리, 진동, 알람 등의 소리가 울릴 경우 부정행위자로 간주하여 처리합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 이 역함수가 미분가능할 때, $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
(나) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{또는} \qquad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$ 과 같이 나타낸다.
(다) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면 $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[논제 1] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \ln x + 2x^2 + ax + b$가 역함수를 갖고, 0이 아닌 실수 L에 대하여

$$\lim_{x\to 1}\left((f^{-1})'(x) \times \left\{\ln \frac{f^{-1}(x)}{f^{-1}(1)}\right\}^2\right) = L$$

일 때, $a+b+L$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수) (15점)

[논제 2] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x) = \dfrac{(x-2)g'(x)}{g(x)}$와 0이 아닌 실수 c가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $\lim_{x\to 2} h(x) = 2$
(2) $\lim_{x\to c} h(\lvert x\rvert)$가 존재하지 않는다.
(3) $g(c) = 18c$

$g(2c)$의 값을 구하시오. (20점)

[논제 3] 함수 $k(x) = x + \sin x$에 대하여 함수 $F(t)$와 상수 α, β를 다음과 같이 정의하자.

(1) $F(t) = \int_0^{\pi t} \cos(k^{-1}(y))dy$
(2) α는 $0 < t < 8$에서 $F(t)$가 극댓값인 t의 값 중 가장 큰 값
(3) β는 $0 < t < 8$에서 $F(t)$가 극솟값인 t의 값 중 가장 큰 값

$F(\beta) - F(\alpha)$의 값을 구하시오. (20점)

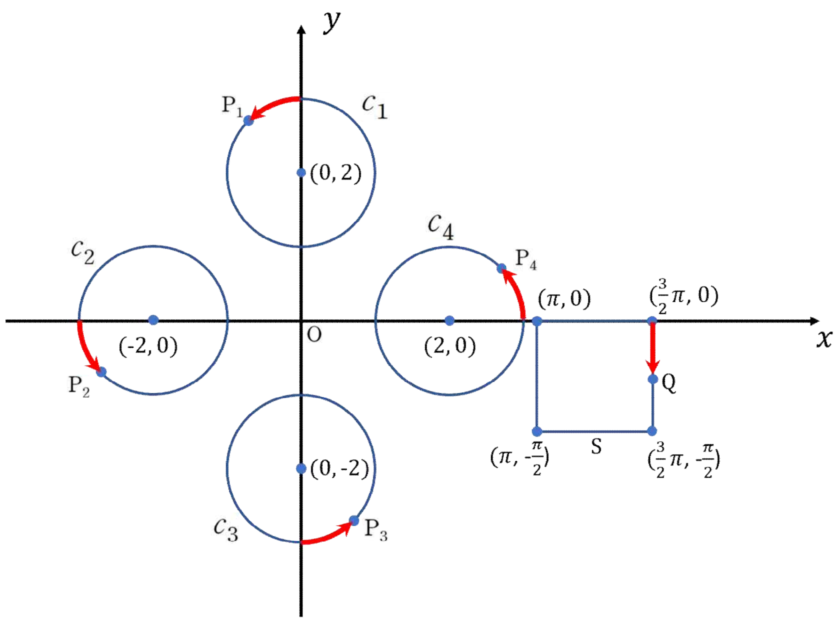
[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 두 변수 x, y의 관계를 새로운 변수 t를 이용하여 $x = f(t), \quad y = g(t)$ 와 같이 나타낼 때, t를 매개변수라 한다.
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a) = 0$이고 $x = a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌거나 음에서 양으로 바뀌면 $f(a)$는 극값이다.
(다) 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[\ f(x)g(x)\ \Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 각각 $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 4개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4와 꼭짓점이 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right), \left(\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right), (\pi, 0)$인 정사각형 S가 있다. 실수 $t\,(t \geq 0)$에 대하여 좌표평면 위를 이동하는 5개의 점 $\mathrm{P_1, P_2, P_3, P_4, Q}$는 다음과 같은 규칙을 따른다.

• 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{R_1}(0,3)$, $\mathrm{R_2}(-3,0)$, $\mathrm{R_3}(0,-3)$, $\mathrm{R_4}(3,0)$에 대하여 점 P_i는 $t=0$일 때 점 R_i를 출발하여 $t\,(t>0)$초 동안 원 C_i 위를 시계 반대 방향으로 t만큼 이동한다. (단, $i = 1, 2, 3, 4$) • 점 Q는 $t=0$일 때 점 $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$을 출발하여 $t\,(t>0)$초 동안 정사각형 S 위를 시계 방향으로 t만큼 이동한다.



출발 후 t 초가 경과했을 때,

- 두 점 P_1과 P_3 사이의 거리를 $\ell(t)$
- 사각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$의 넓이를 $A(t)$
- 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$의 무게중심의 x좌표를 $f(t)$

라 하자.

[논제 1] $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ell(t))^4 dt - 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ell(t))^2 dt + 200\pi$라 하자.
$0 < t < a$에서 함수 $A(t)$의 모든 극값의 합을 구하시오. (20점)

[논제 2] $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} A(t)(f(t))^2 dt - 10\int_0^{\pi} (f(t))^2 dt$의 값을 구하시오. (25점)