단국대학교 2022학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오전)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 도함수의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

[논제 3] 정적분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 고성은 외(2020), 수학 II, 61-66쪽, 72-74쪽, 83-90쪽
○ 이준영 외(2020), 수학 II, 60-63쪽, 74-76쪽, 83-96쪽
○ 김원경 외(2020), 미적분, 79-82쪽, 147-149쪽
○ 황선욱 외(2020), 미적분, 86-89쪽, 166-167쪽

[논제 1 평가기준]
- $f'(x)=0$ 인 x의 값을 제시 : 5점
- $f'(f(x))=0$ 인 x의 값을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- $\int_1^{81} h'(x)dx$의 값을 제시 : 6점
- $\int_3^{3^2} h(x)dx$, $\int_{3^2}^{3^3} h(x)dx$, $\int_{3^3}^{3^4} h(x)dx$의 값을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 4점

[논제 3 평가기준]
- $S(b)=4S(a)+3$을 제시 : 4점
- 방정식 $\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right)=\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{6(S(a)+1)}-67e^{3(S(a)+1)}+252\right)$를 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 6점

□ 예시 답안

[논제 1] 주어진 자연수 n에 대하여

$$f'(x) = 2nxe^{-x} - nx^2e^{-x} = nx(2-x)e^{-x}$$

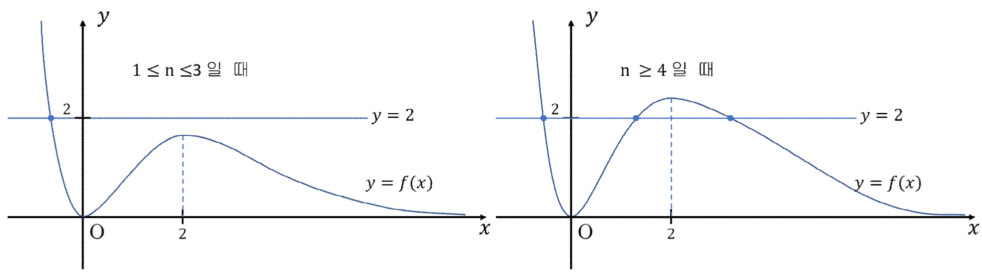
이므로 다음과 같은 증가와 감소를 나타내는 표를 얻을 수 있다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4ne^{-2}$	$\searrow$

즉, 극솟값은 $f(0) = 0$이고 극댓값은 $f(2) = 4ne^{-2}$이다.
한편, 합성함수 미분법에 따라

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$$

이므로 방정식 $g'(x) = 0$의 해는 $f'(f(x)) = 0$의 해 또는 $f'(x) = 0$의 해이다.
(i) $f'(x) = 0$인 경우 : 위 표로부터 $x = 0$ 또는 $x = 2$이다.
(ii) $f'(f(x)) = 0$인 경우 : $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 2$이다.
(a) $f(x) = 0$인 경우 : 함수 $f(x)$는 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 양수이므로, 방정식 $f(x) = 0$의 해는 $x = 0$ 뿐이다.
(b) $f(x) = 2$인 경우 : $4ne^{-2} < 2 \iff n < \dfrac{e^2}{2} = 3.645$ ($e = 2.7$로 계산)
이므로 $n \le 3$ 일 때만 방정식 $f(x) = 2$가 음의 해 하나만 가짐을 알 수 있다.
(i)와 (ii)에 의하여 $n = 1,\ 2,\ 3$.



[참고 그림]

[논제 2] 조건 (2)로 부터

$$h(3^4) = h(3^3) + 1 = h(3^2) + 2 = h(3) + 3 = h(1) + 4$$

이므로

$$\int_1^{81} h'(x)dx = h(81) - h(1) = h(3^4) - h(1) = 4$$

조건 (1)에서 $\int_1^3 h(x)dx = 9$이므로

$$\int_3^{3^2} h(x)dx = \int_3^{3^2} \left\{h\left(\frac{x}{3}\right) + 1\right\}dx = 3\int_1^3 h(t)dt + (3^2 - 3) = 33$$

$$\int_{3^2}^{3^3} h(x)dx = \int_{3^2}^{3^3} \left\{h\left(\frac{x}{3}\right) + 1\right\}dx = 3\int_3^{3^2} h(t)dt + (3^3 - 3^2) = 117$$

$$\int_{3^3}^{3^4} h(x)dx = \int_{3^3}^{3^4} \left\{h\left(\frac{x}{3}\right) + 1\right\}dx = 3\int_{3^2}^{3^3} h(t)dt + (3^4 - 3^3) = 405$$

따라서

$$\begin{aligned}&\int_1^{81}(h(x)+h'(x))dx\\&=\int_1^{3^4}h(x)dx+\int_1^{3^4}h'(x)dx\\&=\int_1^{3}h(x)dx+\int_3^{3^2}h(x)dx+\int_{3^2}^{3^3}h(x)dx+\int_{3^3}^{3^4}h(x)dx+\int_1^{3^4}h'(x)dx\\&=9+33+117+405+4\\&=568\end{aligned}$$

[논제 3] 조건 (1)에 의하여 $S(b)-S(a)=\int_a^b k(x)dx=3S(a)+3$이므로

$$S(b)=4S(a)+3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\star)$$

$S(x)=\int_0^x k(t)dt$에서 $S'(x)=k(x)$ 이므로

$$\int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2}k(x)dx=\int_{S(a)}^{S(b)}\frac{ue^u}{(u+1)^2}du=\left[\frac{e^u}{u+1}\right]_{S(a)}^{S(b)}=\frac{e^{S(b)}}{S(b)+1}-\frac{e^{S(a)}}{S(a)+1}$$

이고 $(\star)$을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{S(x)e^{S(x)}}{(S(x)+1)^2}k(x)dx&=\frac{e^{4S(a)+3}}{4(S(a)+1)}-\frac{e^{S(a)}}{S(a)+1}=\frac{e^{4S(a)+3}-4e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\\&=\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right)\end{aligned}$$

$(\star)$과 조건 (2)를 이용하여 다음 방정식을 얻는다.

$$\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right)=\frac{e^{S(a)}}{4(S(a)+1)}\left(e^{6(S(a)+1)}-67e^{3(S(a)+1)}+252\right)$$

이로부터

$$\left(e^{3(S(a)+1)}-4\right)\left(e^{3(S(a)+1)}-64\right)=0$$

여기에서 $e^{3(S(a)+1)}-4>e^3-4>0$이므로 $e^{3(S(a)+1)}=64$이고

$$S(a)=2\ln 2-1$$

따라서

$$S(b)=4S(a)+3=8\ln 2-1$$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 미분을 활용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분의 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 홍성복 외(2018). 수학II, 75-77쪽, 90-98쪽
○ 류희찬 외(2018). 수학II, 52-59쪽, 67-70쪽, 78-97쪽
○ 박교식 외(2019), 미적분, 100-122쪽

[논제 1 평가기준]
- $x \le 0$인 경우 실근의 개수가 1인 이유를 제시 : 5점
- $x \ge e$인 경우 실근의 개수가 0인 이유를 제시 : 5점
- $0 < x < e$인 경우 실근의 개수가 0인 이유를 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]
- 접선 ℓ의 방정식을 제시 : 5점
- 함수 $f(x)$의 일차항의 계수와 상수항을 제시 : 5점
- 함수 $f(x)$의 삼차항과 이차항의 계수를 제시 : 10점
- 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] $h(x) = e^x - |x^2 - ex| = e^x - |x(x-e)|$라 하자.

(i) $x \le 0$일 때 : $h(x) = e^x - x^2 + ex$이고 $h'(x) = e^x - 2x + e > 0$이므로 $h(x)$는 증가함수이고
$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $h(0) = 1$이므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $(-\infty, 0]$에서 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $x \ge e$일 때 : $h(x) = e^x - x^2 + ex$이고 $h'(x) = e^x - 2x + e$이다.
$h''(x) = e^x - 2$에서 $x \ge e$일 때 $h''(x) > 0$이므로 $h'(x)$가 증가한다.
$h'(e) = e^e - e > 0$이므로 $x \ge e$일 때 $h'(x) > 0$, 즉 $h(x)$가 증가한다.
$h(e) = e^e > 0$이고 $h(x)$가 증가함수이므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $[e, \infty)$에서 실근을 갖지 않는다.

(iii) $0 < x < e$일 때 : $h(x) = (e^x - ex) + x^2$이다.
$e^x - ex$는 $x = 1$에서 최솟값 0을 가지므로 $e^x - ex \ge 0$이고, $x^2 > 0$이므로 $h(x) > 0$이다. 따라서 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $(0, e)$에서 실근을 갖지 않는다.

(i)~(iii)에서 방정식 $h(x) = 0$의 실근의 개수는 하나이다.

[논제 2] $y=e^x$ 위의 점 $(u(t), e^{u(t)})$에서 그은 접선의 방정식은 $y=e^{u(t)}(x-u(t))+e^{u(t)}$이고 이 직선이 x축 위의 점 $(t,0)$을 지나므로 $u(t)=t+1$이다. 조건 (1)에서

$$\int_t^{u(t)} e^x\,dx = \int_t^{t+1} e^x\,dx = e^t(e-1) = 1-\frac{1}{e}$$

이므로 $t=-1$, $u(t)=0$이고 접선 ℓ의 방정식은 $y=x+1$이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a>0)$라 할 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 점 $(0,1)$에서 접하므로 $f(0)=d=1$이고 $f'(0)=c=1$이다. 따라서 $f(x)=ax^3+bx^2+x+1$이다.

한편, 조건 (2)로부터 $b=-\frac{3}{2}a$이므로 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+x+1$이다.

$e^x=z$라 하면 $z>0$이고, 조건 (3)에서 $y=az^3-\frac{3}{2}az^2+z+1$과 $y=z$가 구간 $(0,\infty)$에서 오직 한 점에서만 만나야 한다. 즉, $y=az^3-\frac{3}{2}az^2+1$과 $y=0$이 구간 $(0,\infty)$에서 오직 한 점에서 만나야 한다.

$$\lim_{z\to 0+}\left(az^3-\frac{3}{2}az^2+1\right)=1, \qquad \lim_{z\to\infty}\left(az^3-\frac{3}{2}az^2+1\right)=\infty$$

이므로 곡선 $y=az^3-\frac{3}{2}az^2+1$과 직선 $y=0$이 점 $(z_0,0)$ 에서 접하는 $z_0>0$가 존재한다.

따라서 $3az_0^2-3az_0=0$, $az_0^3-\frac{3}{2}az_0^2+1=0$이어야 하므로 $z_0=1$이고 $a=2$이다.

그러므로 $f(x)=2x^3-3x^2+x+1$이다.

함수 $g(x)=|f(x)-x|=|2x^3-3x^2+1|=|(x-1)^2(2x+1)|$, 즉

$$g(x)=\begin{cases}(x-1)^2(2x+1), & x\ge -\frac{1}{2}\\ -(x-1)^2(2x+1), & x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

따라서 $x\ne -\frac{1}{2}$일 때는 함수 $g(x)$가 미분가능하다. 그러나

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{g\left(-\frac{1}{2}+\Delta x\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}=-\frac{9}{2}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g\left(-\frac{1}{2}+\Delta x\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{9}{2}$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다.

따라서 $p=-\frac{1}{2}$이다.