단국대학교 2020학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오후)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 독립시행에서의 확률을 구하는 능력을 평가

[논제 2] 경우를 나누어 확률을 구하는 능력을 평가

[논제 3] 조건부확률의 개념을 이해하고 활용할 수 있는가를 평가

□ 자료출처

○ 황선욱 외(2019), 확률과 통계, 62-84쪽
○ 신항균 외(2019), 확률과 통계, 63-90쪽

[논제 1 평가기준]
- 4가지 경우를 제시 : 5점
- 4가지 경우의 확률을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- k를 짝수와 홀수로 나누어 $p(k)$를 제시 : 10점
- k를 짝수와 홀수로 나누어 $\dfrac{p(k+3)}{p(k)}$의 값을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]
- 조건부확률에서 분자의 확률을 제시 : 7점
- 조건부확률에서 분모의 확률을 제시 : 8점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

주사위를 던져서 4 이하의 눈이 나오면 o 으로, 5 이상의 눈이 나오면 x 로 표기하기로 하자.

[논제 1] 시행이 끝날 때까지 갑이 얻은 점수가 5 점이 되는 경우는 다음의 4가지가 있다.

oxoxoxoo

oxoxoxoxoxx

xoxoxoxoo

xoxoxoxoxoxx

따라서

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^6+\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ &= \frac{2^5(3^4+3^1+3^3+1)}{3^{12}}=\frac{3584}{3^{12}} \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $3^{12}\times p = 3584$ 이다.

[논제 2] $p(k)$를 구하기 위해서 k가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각한다.

(ⅰ) k가 짝수인 경우는 다음의 2가지가 있다.

$\underbrace{\text{oxox}\cdots\text{ox}}_{(k-2)(\text{짝수})\text{개}}\text{oo}$

$\underbrace{\text{xoxo}\cdots\text{xo}}_{(k-2)(\text{짝수})\text{개}}\text{xx}$

따라서 이 경우는

$$p(k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2}+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k}{2}-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k}{2}+1}=5\cdot\frac{2^{\frac{k}{2}-1}}{3^k}$$

(ⅱ) k가 홀수인 경우는 다음의 2가지가 있다.

$\underbrace{\text{oxox}\cdots\text{o}}_{(k-2)(\text{홀수})\text{개}}\text{xx}$

$\underbrace{\text{xoxo}\cdots\text{x}}_{(k-2)(\text{홀수})\text{개}}\text{oo}$

따라서 이 경우는

$$p(k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k+1}{2}}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{k+1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k-1}{2}}=\frac{2^{\frac{k-1}{2}}}{3^{k-1}}$$

그러므로

$$\frac{p(k+3)}{p(k)}=\begin{cases}\dfrac{4}{45}, & k:\text{짝수}\\[2ex] \dfrac{10}{81}, & k:\text{홀수}\end{cases}$$

따라서

$$\sum_{k=10}^{16}\frac{p(k+3)}{p(k)}=\frac{4}{45}\times 4+\frac{10}{81}\times 3=\frac{98}{135}$$

이다.

[논제 3] 시행이 7회 이하에서 끝나는 사건을 A, 시행이 끝났을 때 갑이 얻은 점수가 3점일 사건을 B라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.

사건 $A\cap B$, 즉, 시행이 7회 이하에서 끝나고 갑이 얻은 점수가 3점인 경우는 다음의 3가지가 있다.

(ⅰ) 시행이 4회에서 끝나고 갑이 3점인 경우, 즉, oxoo

(ⅱ) 시행이 5회에서 끝나고 갑이 3점인 경우, 즉, xoxoo

(ⅲ) 시행이 7회에서 끝나고 갑이 3점인 경우, 즉, oxoxoxx

따라서,

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{296}{2187}$$

이다. 또한,

$$\mathrm{P}(A)=1-(\text{시행이 8회 이상 진행될 확률})$$

이고, 시행이 8회 이상 진행된다는 것은 7회까지 시행이 끝나지 않는 것을 의미하는데 이 경우는 다음의 2가지가 있다.

xoxoxox

oxoxoxo

따라서

$$\mathrm{P}(A)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{721}{729}$$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{296}{2187}}{\frac{721}{729}}=\dfrac{296}{2163}$ 이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수의 주기성을 이용하여 극값을 판정할 수 있는지를 평가

[논제 2] 함수의 주기성과 정적분의 성질을 이용하여, 정적분의 값을 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김창동 외(2019), 미적분 I, 119-123쪽
○ 김원경 외(2019), 미적분 II, 146-151쪽
○ 우정호 외(2019), 미적분 II, 200-212쪽

[논제 1 평가기준]

- $g(x)$가 극값을 갖는 $\frac{3}{4}x=\frac{1}{3}+(m-1)$ $(m=1,2,3,4,5)$, $\frac{3}{4}x=\frac{2}{3}+(s-1)$ $(s=1,2,3,4)$를 제시 : 7점
- $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$임을 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 8점

[논제 2 평가기준]

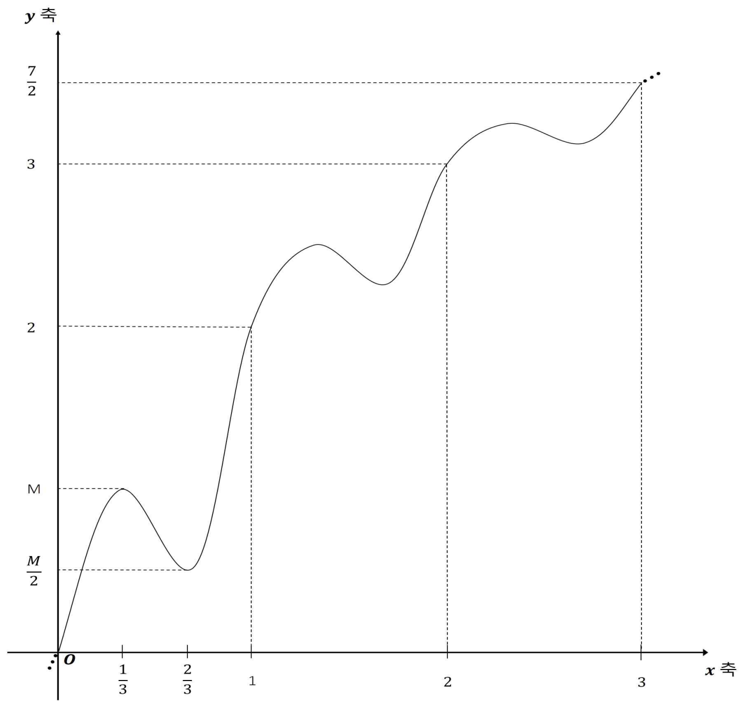
- $\int_0^3 xf'(x)dx=3f(3)-\int_0^3 f(x)dx=\frac{21}{2}-F(3)$을 제시 : 8점
- $F(1)=\frac{2}{3}$ 또는 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}$를 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 조건 (1)과 (2)에 의하여 구간 $[0,1]$에서 $f(x)\geq 0$이다. 또한, 조건 (3)에 의해 $(n,n+1]$에서

$$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x-1)-f(n-1)\}+f(n)$$

이므로 $f\left(\frac{1}{3}\right)=M$이라고 하면 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



그래프 : $f(x)$의 개형

함수 $g(x)$는 미분가능하고

$$g'(x) = \frac{3}{4} f'\left(\frac{3}{4}x\right) g(x)$$

이므로 $g'(x) = 0$ 이려면 $f'\left(\frac{3}{4}x\right) = 0$ 이어야 한다. 또, 함수 $g(x)$가 구간 $(0, 6)$에서 정의되므로 $0 < \frac{3}{4}x < \frac{9}{2}$ 이고 조건으로부터

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{3} + (m-1) \ (m = 1,2,3,4,5) \ \text{또는} \ \frac{3}{4}x = \frac{2}{3} + (s-1) \ (s = 1,2,3,4)$$

일 때 $g(x)$는 극값을 갖는다. 또한

$$g\left(\frac{4}{9} + \frac{4(m-1)}{3}\right) = e^{f\left(\frac{1}{3} + (m-1)\right)}$$

$$g\left(\frac{8}{9} + \frac{4(s-1)}{3}\right) = e^{f\left(\frac{2}{3} + (s-1)\right)}$$

이므로 $g(x)$의 모든 극값의 곱은

$$T = e^{\left(\sum_{m=1}^{5} f\left(\frac{1}{3} + (m-1)\right) + \sum_{s=1}^{4} f\left(\frac{2}{3} + (s-1)\right)\right)}$$

이다. 그리고

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = M,\ f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 + \frac{M}{2},\ f\left(\frac{7}{3}\right) = 3 + \frac{M}{4},\ f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{2} + \frac{M}{8},\ f\left(\frac{13}{3}\right) = \frac{15}{4} + \frac{M}{16}$$

이고

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{M}{2},\ f\left(\frac{5}{3}\right) = 2 + \frac{M}{4},\ f\left(\frac{8}{3}\right) = 3 + \frac{M}{8},\ f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{7}{2} + \frac{M}{16}$$

이다. 따라서

$$\sum_{m=1}^{5} f\left(\frac{1}{3}+(m-1)\right)+\sum_{s=1}^{4} f\left(\frac{2}{3}+(s-1)\right)=\frac{83}{4}+\frac{23M}{8}=\frac{23M+166}{8}$$

에서 $\ln T=\frac{23M+166}{8}=\frac{189}{8}$이다. 그러므로 $M=1$이고

$$f\left(\frac{16}{3}\right)-f\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{11}{32}$$

이다.

[논제 2] $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $F(2)=3$이다. $f(3)=\frac{7}{2}$이므로 부분적분법을 이용하면

$$\int_0^3 xf'(x)dx=3f(3)-\int_0^3 f(x)dx=\frac{21}{2}-F(3)$$

이다. 또한,

$$3=F(2)=F(1)+\frac{1}{2}F(1)+2=\frac{3}{2}F(1)+2$$

이므로 $F(1)=\frac{2}{3}$이다. 그러므로 조건 (3)에 의하여

$$F(3)=\int_0^3 f(x)dx=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)F(1)+f(1)+f(2)=\frac{37}{6}$$

$$\left(\text{또는 } F(3)=F(2)+3+\frac{1}{4}F(1)=3+3+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{37}{6}\right)$$

이다 (그래프 참조). 따라서

$$\int_0^3 xf'(x)dx=\frac{21}{2}-\frac{37}{6}=\frac{13}{3}$$

이다.