단국대학교 2020학년도 수시모집 논술고사

자연계열 가이드답안 (오전)

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 정적분의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 매개변수로 나타내어진 곡선을 이해하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 정적분의 적분법을 이해하고 있는지를 평가

☐ 자료출처

○ 정상권 외(2018), 미적분 I, 166-178쪽
○ 김창동 외(2018), 미적분 I, 118-127쪽
○ 김원경 외(2018), 미적분 II, 81-86쪽
○ 이강섭 외(2019), 미적분 II, 156-174쪽
○ 우정호 외(2018), 기하와 벡터, 47-52쪽

[논제 1 평가기준]

- $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}k^6}{\left(\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}k^2\right)\left(\dfrac{1}{n^4}\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3\right)}$ 을 적분으로 표현 : 8점
- 정답을 제시 : 7점

[논제 2 평가기준]

- 접선이 원점을 지날 조건 $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ 을 제시 : 5점
- $k=-2e^{-t}\cos t$ 임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

[논제 3 평가기준]

- $f(t+1)=g'(t)-tf'(t)$ 를 제시 : 5점
- $\int_1^2 tf(t)dt = \int_0^1 (t+1)f(t+1)dt$ 를 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^6}{\sum_{k=1}^{2n}k^2\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^7}\sum_{k=1}^{n}k^6}{\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}k^2\right)\left(\frac{1}{n^4}\sum_{k=2n+1}^{4n}k^3\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^6}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{4n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\right\}}$$

$$=\frac{\int_0^1 x^6dx}{\left(\int_0^2 x^2dx\right)\left(\int_2^4 x^3dx\right)}$$

$$=\frac{1}{1120}$$

이다.

[논제 2] 곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x(t), y(t))$가 조건 (2)를 만족시키려면, 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{y(t)}{x(t)}$이므로

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

이다. 이 식에

$$\begin{cases} x'(t)= & e^t(\cos t-\sin t) \\ y'(t)= & -e^t(\sin t+\cos t)\end{cases}$$

를 대입하여 정리하면

$$\frac{2}{k}\cos t+e^t=0$$

즉,

$$k=-2e^{-t}\cos t \qquad \cdots (*)$$

이다. 이제 $f(t)=-2e^{-t}\cos t$라 하면

$$f'(t)=2e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

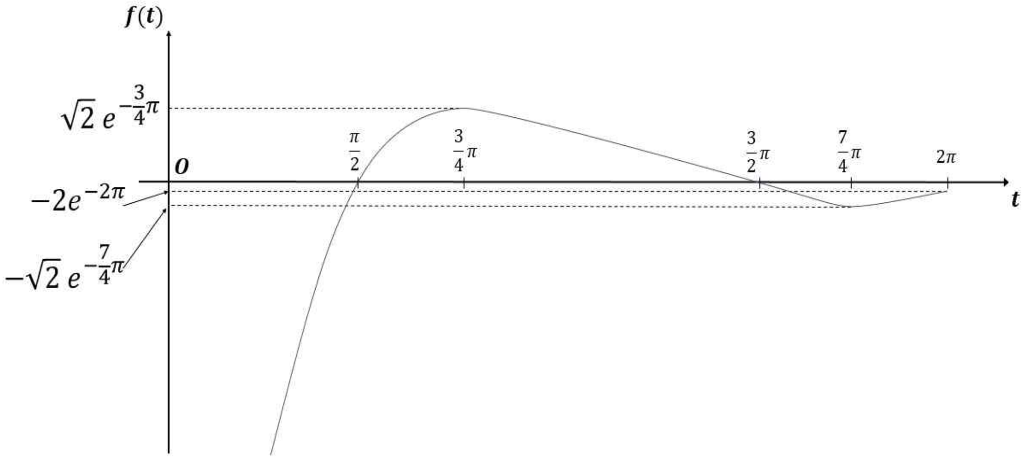
이므로, $0\le t\le 2\pi$에서 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗	극대	↘	극소	↗	

한편,

$$f(0)=-2,\quad f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{3}{4}\pi},\quad f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}e^{-\frac{7}{4}\pi},\quad f(2\pi)=-2e^{-2\pi}$$

이므로, $f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



그러므로 식 (*)을 만족시키는 t가 3개, 즉, 조건을 만족시키는 점 P가 3개가 되도록 하는 k의 값의 범위는

$$-\sqrt{2}\,e^{-\frac{7}{4}\pi} < k < -2e^{-2\pi}$$

이다.

[논제 3] $t+s=u$로 치환하면

$$tf(t) = g(t) - \int_0^1 f(t+s)\,ds = g(t) - \int_t^{t+1} f(u)\,du$$

이다. 양변을 미분하면

$$f(t) + tf'(t) = g'(t) - f(t+1) + f(t)$$

이므로

$$f(t+1) = g'(t) - tf'(t)$$

이다. 치환적분법에 의하여

$$\int_1^2 tf(t)dt = \int_0^1 (t+1)f(t+1)\,dt$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 tf(t)dt + \int_0^1 (t^2 f'(t) + g(t))\,dt \\
&= \int_0^1 (t+1)f(t+1)dt + \int_0^1 t^2 f'(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t+1)(g'(t) - tf'(t))\,dt + \int_0^1 t^2 f'(t)dt + \int_0^1 g(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t+1)g'(t)dt - \int_0^1 tf'(t)dt + \int_0^1 g(t)\,dt \\
&= [(t+1)g(t)]_0^1 - \int_0^1 g(t)\,dt - [tf(t)]_0^1 + \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)\,dt \\
&= 2g(1) - f(1) = 6 \quad (\because \text{조건 (1)에서 } t=0\text{일 때 } \int_0^1 f(t)\,dt = g(0))
\end{aligned}$$

이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 정규모집단에서 표본평균의 성질을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 표준화를 통하여 표본평균에 관한 확률을 계산할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 신항균 외(2019), 확률과 통계, 124-139쪽
○ 정상권 외(2018), 확률과 통계, 142-158쪽
○ 김창동 외(2019), 확률과 통계, 135-151쪽

[논제 1 평가기준]

- $\sigma = \dfrac{2}{3}$을 제시 : 7점
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left|h\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{5}\right)-h\left(-\frac{k}{5}\right)\right| = h(-2)-h(0)$ 임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 8점

[논제 2 평가기준]

- $n=25$ 를 제시 : 10점
- 정답을 제시 : 15점

□ 예시 답안

[논제 1] 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르므로, $Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 로 표준화하면,

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \geq m+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{1}{\sigma}\right) = 0.0668$$

따라서 $\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{1}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.0668 = 0.4332$ 이며 표준정규분포표로부터 $\dfrac{1}{\sigma} = 1.5$, 즉, $\sigma = \dfrac{2}{3}$ 이다.

그러므로

$$h(x) = \mathrm{P}(\sqrt{n}(\overline{X}-m) \leq -x) = \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -\frac{x}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq -\frac{3}{2}x\right)$$

이다. 따라서 $h(x)$ 는 감소함수이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\left|h\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{5}\right)-h\left(-\frac{k}{5}\right)\right|$$
$$=\left(h\left(-\frac{1}{5}\right)-h(0)\right)+\left(h\left(-\frac{2}{5}\right)-h\left(-\frac{1}{5}\right)\right)+\cdots+\left(h(-2)-h\left(-\frac{9}{5}\right)\right)$$
$$=h(-2)-h(0)$$

이다. 그런데 $h(-2)=\mathrm{P}(Z\le 3)$, $h(0)=\mathrm{P}(Z\le 0)$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\left|h\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{5}\right)-h\left(-\frac{k}{5}\right)\right| = h(-2)-h(0)=\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$$

이다.

[논제 2] $\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m+2, 4\sigma^2)$을 각각 따르므로, 조건

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le m+1)=\mathrm{P}(Y\le m+12)$$

에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le\frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-m-2}{2\sigma}\le\frac{10}{2\sigma}\right)$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{5}{\sigma}\right)$$

이므로 $n=25$ 이다. 이로부터

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\ge a)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}}\right|\ge\frac{a}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}}\right)=\mathrm{P}\left(|Z|\ge\frac{5a}{\sigma}\right)=0.0124$$

이므로 $\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{5a}{\sigma}\right)=1-0.0124=0.9876$ 이다. $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{5a}{\sigma}\right)=\frac{0.9876}{2}=0.4938$ 에서 표준정규분포표로부터 $\frac{5a}{\sigma}=\frac{5}{2}$ 이므로 $a=\frac{1}{3}$ 이다.