단국대학교 2020학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제
(오전)

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성 명	

☑ 수험생 유의사항

1. 시험시간은 120분이며, 고사 종료시까지 퇴실할 수 없습니다. (중도퇴실할 경우 결시처리)
2. 문제번호와 답안번호가 반드시 일치하여야 합니다. (일치하지 않을 경우 0점 처리됨)
3. 문제별 답안작성란을 벗어나지 않게 작성하여야 합니다.
4. 답안 작성 시 인적사항 등 답안과 관련 없는 내용을 작성한 경우 0점처리 됩니다.
5. 답안은 반드시 **검정색 필기구**로 작성하시기 바랍니다.
   (연필, 샤프, 빨간색이나 파란색 필기구 사용금지)
6. 답안지는 교체가 불가하오니 원고지 교정부호 또는 수정테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
7. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
8. 휴대폰 등 전자기기는 전원을 끄고 비닐백에 넣어 좌석 아래에 보관하시기 바랍니다. 고사 중에 벨소리, 진동, 알람 등의 소리가 울릴 경우 부정행위자로 간주하여 처리합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 자연수 n에 대하여 $[a,b]$를 n등분한 각 등분점 (양 끝점 포함)의 x좌표를 차례로 $a=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$라 하자. 이때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} \qquad \left(x_k=a+k\frac{b-a}{n},\ k=1,2,\cdots,n\right)$$

을 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이를 기호로 $\int_a^b f(x)dx$와 같이 나타낸다.

(나) 두 변수 x와 y사이의 관계가 t를 매개로 하여

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

의 꼴로 나타낼 때, 변수 t를 매개변수라 하고 $x=f(t),\ y=g(t)$를 매개변수로 나타낸 함수라 한다.

또, $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$일 때

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

$f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대,

$f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

(라) [정적분의 치환적분법]

구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

[정적분의 부분적분법]

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 미분가능하고 $f'(x),\ g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

[논제 1] 다음 극한값을 구하시오. (15점)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^6}{\sum_{k=1}^{2n}k^2\ \sum_{k=2n+1}^{4n}k^3}$$

[논제 2] 매개변수 t $(0 < t < 2\pi)$로 나타내어진 곡선

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{k} + e^t \cos t \\ y(t) = \dfrac{1}{k} - e^t \sin t \end{cases} \quad (k \neq 0)$$

에 대하여 다음을 만족시키는 점 P의 개수가 3이 되도록 하는 k의 값의 범위를 구하시오. (20점)

(1) 점 P는 곡선 위의 점이다.
(2) 점 P에서의 접선이 원점을 지난다.

[논제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(t)$와 $g(t)$가

(1) $tf(t) = g(t) - \int_0^1 f(t+s)\,ds$
(2) $f(1) = 2$, $g(1) = 4$

를 만족시킨다. 이때,

$$\int_1^2 tf(t)dt + \int_0^1 (t^2 f'(t) + g(t))\,dt$$

의 값을 구하시오. (20점)

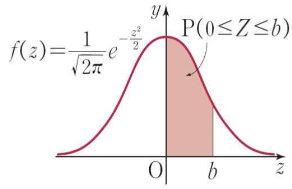
[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 평균이 0 이고 분산이 1 인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 $\mathrm{N}(0,1)$ 과 같이 나타낸다. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$ 을 따를 때, Z의 확률밀도함수는

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (-\infty < z < \infty)$$

이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 임의의 양수 b 에 대하여 Z가 0 이상 b 이하의 값을 가질 확률 $\mathrm{P}(0 \le Z \le b)$ 는 오른쪽 그림에서 표시한 부분의 넓이와 같다.



(나) 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$ 을 따를 때, $\overline{X}$ 는 표본의 크기 n 의 값에 관계없이 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다.

(다) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$ 을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$ 을 따른다.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$ 을 따르는 어떤 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} \ge m+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0.0668$$

이라 하자. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 다음 논제에 답하시오.

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

[논제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$h(x) = \mathrm{P}\left(\sqrt{n}(\overline{X}-m) \le -x\right)$$

에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\left|h\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{5}\right)-h\left(-\frac{k}{5}\right)\right|$ 의 값을 구하시오. [20점]

[논제 2] 정규분포 $\mathrm{N}(m+2,\, 4\sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 Y 에 대하여

$$\mathrm{P}(\overline{X} \le m+1)=\mathrm{P}(Y \le m+12)$$

가 성립할 때 $\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m| \ge a\right)=0.0124$ 를 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오. [25점]