의예 4

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사
전형명		논술전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		의예과 / 문항 4
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I, 수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 함수의 연속, 도형의 넓이
예상 소요 시간		의예과 25분 / 100분

2. 문항 및 제시문

문항 4 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (200점)

(ㄱ) 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이고 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $10 \le |f(2)-f(1)| \le 20$
>
> (나) 실수 t가 $0 \le t \le 4$일 때 $f(g(t))=f(t)$, $t<0$일 때 $g(t)=g(0)$, $t>4$일 때 $g(t)=g(4)$이다.
>
> (다) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$로 가능한 모든 함수의 개수를 n이라고 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$와 $g(x)$로 가능한 모든 함수에 대하여 다음 S의 값 중 가장 큰 값을 M, 가장 작은 값을 m이라고 하자.

> S는 곡선 $y=f'(x)g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이이다.

논제 (200점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$로 가능한 함수를 모두 구하시오. 또한 제시문 (ㄴ)의 n, 제시문 (ㄷ)의 M과 m의 값을 구하시오. 이 모든 과정의 근거를 논술하시오.

3. 출제 의도

1) 일대일함수의 특성을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
2) 간단한 다항식의 인수분해를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
3) 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
3) 함수의 극한 및 연속의 뜻을 알고 함수의 극한에 대한 성질 및 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
4) 도함수를 활용하여 함수의 증가, 감소 및 그래프의 개형을 파악하고 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
5) 치환적분을 이해하고 이를 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학] - (1) 함수 - 1 함수 [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 [12수학 II 01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[수학] - (1) 함수 - 1 함수 [10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다. [10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속 [12수학 II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	[수학 II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용 [12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

<table>
<tr><th>적용 교육과정</th><th>교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”</th></tr>
<tr><td>논제</td><td>[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식
[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
[수학] - (1) 문자와 식 - 3 인수분해
[10수학01-04] 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
[수학] - (1) 함수 - 1 함수
[10수학04-01] 함수의 개념을 이해하고, 그 그래프를 이해한다.
[10수학04-02] 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
[10수학04-03] 역함수의 의미를 이해하고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.
[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한
[12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 2 함수의 연속
[12수학 II 01-03] 함수의 연속의 뜻을 안다.
[12수학 II 01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용
[12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.
[12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
[수학 II] - (3) 적분 - 3 정적분의 활용
[12수학 II 03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
[미적분] - (3) 적분법 - 1 여러 가지 적분법
[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외	비상	2024	8-95, 203-239
	수학	박교식 외	동아출판	2020	11-94, 211-248
	수학	이준열 외	천재교육	2021	10-105, 222-259
	수학 II	이준열 외	천재교육	2021	10-153
	수학 II	홍성복 외	지학사	2021	10-159
	수학 II	박교식 외	동아출판	2024	11-152
	미적분	황선욱 외	미래엔	2021	137-185
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2021	127-173
	미적분	권오남 외	교학사	2020	140-189

5. 문항 해설

1) 일대일함수의 특성을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
2) 간단한 다항식의 인수분해를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
3) 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
3) 함수의 극한 및 연속의 뜻을 알고 함수의 극한에 대한 성질 및 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
4) 도함수를 활용하여 함수의 증가, 감소 및 그래프의 개형을 파악하고 이를 활용할 수 있는지를 평가한다.
5) 치환적분을 이해하고 이를 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

6. 채점 기준

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="3">논제</td><td>$f(x)$의 최고차항의 계수를 k라고 하면 실수 a, b, c에 대하여
$f'(x)=k(3(x-a)^2-b, f(x)=k((x-a)^3-b(x-a))+c$로 쓸 수 있다.
$b\le 0$이면 $f(x)$는 일대일함수이므로 조건 (나)에 의해 실수 t가 $0\le t\le 4$일 때 $g(t)=t$이고,
이는 조건 (다)를 만족하지 않는다. 그러므로 $b>0$이다.</td><td>20</td></tr>
<tr><td>실수 t가 $0\le t\le 4$일 때 $x=t$에서의 함숫값 $g(t)=s$는 조건 (나)에서 $f(s)=f(t)$이므로
$k((s-a)^3-b(s-a))+c=k((t-a)^3-b(t-a))+c$이고
$(s-t)((s-a)^2+(s-a)(t-a)+(t-a)^2-b=0$이다.
따라서 $|t-a|>2\sqrt{b/3}$일 때는 $s=t$이고,
$|t-a|\le 2\sqrt{b/3}$일 때는 $s=t$ 또는 $s=\dfrac{-(t-a)\pm\sqrt{4b-3(t-a)^2}}{2}+a$이다.</td><td>30</td></tr>
<tr><td>정의역이 $[a-2\sqrt{b/3}, a+2\sqrt{b/3}]$인 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$를
$\alpha(x)=\dfrac{-(x-a)-\sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2}+a, \beta(x)=\dfrac{-(x-a)+\sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2}+a,$
정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $I(x)$를 $I(x)=x$라고 하면 위 결과로부터
$0\le t\le 4$이고 $|t-a|>2\sqrt{b/3}$일 때
$g(t)=I(t)$이고, ---- (*)
$0\le t\le 4$이고 $|t-a|>2\sqrt{b/3}$일 때
$(g(t)-I(t))(g(t)-\alpha(t))(g(t)-\beta(t))=0$이다. ---- (**)

1) $0<a-2\sqrt{b/3}$ 또는 $a+2\sqrt{b/3}\le 0$인 경우:
(*)에 의해 $g(x)$는 어떤 구간 $(0, p_1]$에서 함수 $I(x)$와 일치한다. (단, $p_1>0$)
따라서 $g(0)=\lim_{x\to 0+}g(t)=\lim_{x\to 0+}t=0$이고, $\lim_{x\to 0+}\dfrac{g(t)-g(0)}{\sqrt{t}}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{t-0}{\sqrt{t}}=0$이다.
따라서 (다) 조건을 만족하지 않는다.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>하위 문항</th><th>채점 기준</th><th>배점</th></tr>
<tr><td rowspan="2">논제</td><td>

2) $a-2\sqrt{b/3}\le 0<a+2\sqrt{b/3}$인 경우:

(**)에 의해 $g(x)$는 어떤 닫힌구간 $[0, p_2]$에서 세 함수 $I(x), \alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. (단, $p_2>0$)

조건 (다)에서 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{g(x)-g(0)}{\sqrt{x}}=\infty$이므로

이 구간에서 $g(x)$와 일치하는 함수는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 따라서

이 구간에서 $g(x)$는 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하고 $a-2\sqrt{b/3}=0$,

즉 $4b=3a^2$이다. 그런데 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\alpha(x)-\alpha(0)}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{6a}}{2}$,

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\beta(x)-\beta(0)}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{6a}}{2}$이므로 닫힌구간 $[0, p_2]$에서 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치하고,

$a=2, b=3$이다.

따라서 $f(x)=k((x-2)^3-3(x-2))+c$이고, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서

극댓값 $f(1)=2k+c$, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-2k+c$를 가진다.

그리고, 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$의 정의역은 $[0, 4]$이고,

$\alpha(x)=\frac{-(x-2)-\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2$, $\beta(x)=\frac{-(x-2)+\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2$이다.

</td><td>50</td></tr>
<tr><td>

세 곡선 $y=I(x), y=\alpha(x), y=\beta(x)$는 열린구간 $(0,1), (1,3), (3,4)$에서는 교점을 가지지 않으므로 (**)에 의해 각 닫힌구간 $[0,1], [1,3], [3,4]$에서는 $g(x)$는 세 함수 $I(x), \alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. 그런데 닫힌구간 $[0, p_2]$에서 $g(x)$가 $\beta(x)$와 일치하므로

닫힌구간 $[0,1]$에서 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치하고, $g(1)=\beta(1)=4\ne 1=\alpha(1)=I(1)$이므로

닫힌구간 $[1,3]$에서도 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치한다.

닫힌구간 $[3,4]$에서는 $g(3)=\beta(3)=I(3)=3\ne 0=\alpha(3)$이므로 닫힌구간 $[3,4]$에서는

$g(x)$는 $I(x)$ 또는 $\beta(x)$와 일치한다. 따라서 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$로 가능한 모든 함수는

다음 두 함수 $g_1(x), g_2(x)$이고 제시문 (ㄴ)의 n의 값은 2이다.

$$g_1(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ \frac{-(x-2)+\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2 & (0\le x\le 3) \\ x & (3<x\le 4) \\ 4 & (4<x) \end{cases}$$

$$g_2(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ \frac{-(x-2)+\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2 & (0\le x\le 4) \\ 1 & (4<x) \end{cases}$$

</td><td>50</td></tr>
</table>

하위 문항	채점 기준	배점
논제	함수 $f_1(x)$은 정의역이 $[3, 4]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$이며 $3 \le t \le 4$인 모든 t에 대하여 $f_1(t)=f(t)$을 만족하는 함수이고, 함수 $f_2(x)$은 정의역이 $[1, 3]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$이며 $1 \le t \le 3$인 모든 t에 대하여 $f_2(t)=f(t)$을 만족하는 함수라고 하자. 삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=2k+c$, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-2k+c$를 가지고 $f(4)=2k+c$이므로 두 함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$는 일대일대응이고 역함수를 가진다. $h_1(x)$를 $f_1(x)$의 역함수, $h_2(x)$를 $f_2(x)$의 역함수라고 하자. $1 \le t \le 3$인 모든 실수 t에 대하여 $f(h_1(f(t)))=f(t)$이고, $\alpha(t) \le I(t) \le h_1(f(t))$, $\alpha(t) \le I(t) \le \beta(t)$이므로 $h_1(f(t))=\beta(t)=g_1(t)=g_2(t)$ 이고, $3 \le t \le 4$인 모든 실수 t에 대하여 $f(h_1(f(t)))=f(t)$, $f(h_2(f(t)))=f(t)$이고, $\alpha(t) \le \beta(t) \le I(t)$, $\alpha(t) \le h_2(f(t)) \le h_1(f(t))$이므로 $g_1(t)=h_1(f(t))$, $g_2(t)=h_2(f(t))$이다. $1 \le t \le 4$인 실수 t에 대하여 $g(t) \ge 0$이고, $1 \le t \le 3$인 실수 t에 대하여 $f'(t) \le 0$, $3 \le t \le 4$인 실수 t에 대하여 $f'(t) \ge 0$이므로 제시문 (ㄷ)의 S는 다음과 같다. $S=-\int_1^3 f'(x)g(x)dx+\int_3^4 f'(x)g(x)dx=-\int_1^3 h_1(f(x))(f'(x)+\int_3^4 f'(x)g(x)dx$ 1) $-\int_1^3 h_1(f(x))(f'(x)dx=-\int_{2k+c}^{-2k+c} h_1(x)dx=\int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx$ $=4k\times h_1(2k+c)-\int_3^4 \{f(x)-(-2k+c)\}dx=16k-\frac{5}{4}k=\frac{59}{4}k$ 2) $g(x)=g_1(x)$인 경우: $\int_3^4 f'(x)g(x)dx=\int_3^4 h_1(f(x))(f'(x)dx=\int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx=\frac{59}{4}k$ $g(x)=g_2(x)$인 경우: $\int_3^4 f'(x)g(x)dx=\int_3^4 h_2(f(x))(f'(x)dx=\int_{-2k+c}^{2k+c} h_2(x)dx=8k$ 따라서 $S=\frac{59}{2}k$ 또는 $\frac{91}{4}k$이다. $\|f(2)-f(1)\|=2k$이므로 제시문 (ㄱ)의 조건 (가)에서 $10 \le 2k \le 20$, 즉 $5 \le k \le 10$이다. 그러므로 $M=\frac{59}{2}\times 10=295$, $m=\frac{91}{4}\times 5=\frac{455}{4}$이다.	50

7. 예시 답안

$f(x)$의 최고차항의 계수를 k라고 하면 실수 a, b, c에 대하여 $f'(x)=k(3(x-a)^2-b$,

$f(x)=k((x-a)^3-b(x-a))+c$로 쓸 수 있다. $b\le 0$이면 $f(x)$는 일대일함수이므로 조건 (나)에 의해

실수 t가 $0\le t\le 4$일 때 $g(t)=t$이고, 이는 조건 (다)를 만족하지 않는다. 그러므로 $b>0$이다.

실수 t가 $0\le t\le 4$일 때 $x=t$에서의 함숫값 $g(t)=s$는 조건 (나)에서 $f(s)=f(t)$이므로

$k((s-a)^3-b(s-a))+c=k((t-a)^3-b(t-a))+c$이고

$(s-t)((s-a)^2+(s-a)(t-a)+(t-a)^2-b=0$이다.

따라서 $|t-a|>2\sqrt{b/3}$ 일 때는 $s=t$이고,

$|t-a|\le 2\sqrt{b/3}$ 일 때는 $s=t$ 또는 $s=\dfrac{-(t-a)\pm\sqrt{4b-3(t-a)^2}}{2}+a$이다.

정의역이 $[a-2\sqrt{b/3}, a+2\sqrt{b/3}]$인 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$를

$\alpha(x)=\dfrac{-(x-a)-\sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2}+a$, $\beta(x)=\dfrac{-(x-a)+\sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2}+a$,

정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $I(x)$를 $I(x)=x$라고 하면 위 결과로부터

$0\le t\le 4$이고 $|t-a|>2\sqrt{b/3}$ 일 때

$g(t)=I(t)$이고, ---- (*)

$0\le t\le 4$이고 $|t-a|>2\sqrt{b/3}$ 일 때

$(g(t)-I(t))(g(t)-\alpha(t))(g(t)-\beta(t))=0$이다. ---- (**)

1) $0<a-2\sqrt{b/3}$ 또는 $a+2\sqrt{b/3}\le 0$인 경우:

(*)에 의해 $g(x)$는 어떤 구간 $(0, p_1]$에서 함수 $I(x)$와 일치한다. (단, $p_1>0$)

따라서 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0+}g(t)=\lim\limits_{x\to 0+}t=0$이고, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(t)-g(0)}{\sqrt{t}}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{t-0}{\sqrt{t}}=0$이다.

따라서 (다) 조건을 만족하지 않는다.

2) $a-2\sqrt{b/3}\le 0<a+2\sqrt{b/3}$인 경우:

(**)에 의해 $g(x)$는 어떤 닫힌구간 $[0, p_2]$에서 세 함수 $I(x), \alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. (단, $p_2>0$)

조건 (다)에서 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{g(x)-g(0)}{\sqrt{x}}=\infty$이므로

이 구간에서 $g(x)$와 일치하는 함수는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 따라서

이 구간에서 $g(x)$는 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하고 $a-2\sqrt{b/3}=0$, 즉 $4b=3a^2$이다.

그런데 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\alpha(x)-\alpha(0)}{\sqrt{x}}=-\dfrac{\sqrt{6a}}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\beta(x)-\beta(0)}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{6a}}{2}$이므로

닫힌구간 $[0, p_2]$에서 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치하고, $a=2, b=3$이다.

따라서 $f(x)=k((x-2)^3-3(x-2))+c$이고, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=2k+c$, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-2k+c$를 가진다. 그리고, 두 함수 $\alpha(x)$, $\beta(x)$의 정의역은 $[0, 4]$이고,
$\alpha(x)=\dfrac{-(x-2)-\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2$, $\beta(x)=\dfrac{-(x-2)+\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2$이다.

세 곡선 $y=I(x)$, $y=\alpha(x)$, $y=\beta(x)$는 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$서는 교점을 가지지 않으므로 (**)에 의해 각 닫힌구간 $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 4]$에서는 $g(x)$는 세 함수 $I(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다.
그런데 닫힌구간 $[0, p_2]$에서 $g(x)$가 $\beta(x)$와 일치하므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치하고,
$g(1)=\beta(1)=4\neq 1=\alpha(1)=I(1)$이므로 닫힌구간 $[1, 3]$에서도 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치한다.
닫힌구간 $[3, 4]$에서는 $g(3)=\beta(3)=I(3)=3\neq 0=\alpha(3)$이므로 닫힌구간 $[3, 4]$에서는 $g(x)$는 $I(x)$ 또는 $\beta(x)$와 일치한다. 따라서 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$로 가능한 모든 함수는 다음 두 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$이고 제시문 (ㄴ)의 n의 값은 2이다.

$$g_1(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ \dfrac{-(x-2)+\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2 & (0\leq x\leq 3) \\ x & (3<x\leq 4) \\ 4 & (4<x) \end{cases}$$

$$g_2(x)=\begin{cases} 3 & (x<0) \\ \dfrac{-(x-2)+\sqrt{3x(4-x)}}{2}+2 & (0\leq x\leq 4) \\ 1 & (4<x) \end{cases}$$

함수 $f_1(x)$은 정의역이 $[3, 4]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$이며 $3\leq t\leq 4$인 모든 t에 대하여 $f_1(t)=f(t)$을 만족하는 함수이고, 함수 $f_2(x)$은 정의역이 $[1, 3]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$이며 $1\leq t\leq 3$인 모든 t에 대하여 $f_2(t)=f(t)$을 만족하는 함수라고 하자.

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=2k+c$, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-2k+c$를 가지고 $f(4)=2k+c$이므로 두 함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$는 일대일대응이고 역함수를 가진다. $h_1(x)$를 $f_1(x)$의 역함수, $h_2(x)$를 $f_2(x)$의 역함수라고 하자.

$1\leq t\leq 3$인 모든 실수 t에 대하여 $f(h_1(f(t)))=f(t)$이고,
$\alpha(t)\leq I(t)\leq h_1(f(t))$, $\alpha(t)\leq I(t)\leq \beta(t)$이므로 $h_1(f(t))=\beta(t)=g_1(t)=g_2(t)$이고,

$3\leq t\leq 4$인 모든 실수 t에 대하여 $f(h_1(f(t)))=f(t)$, $f(h_2(f(t)))=f(t)$이고,
$\alpha(t)\leq\beta(t)\leq I(t)$, $\alpha(t)\leq h_2(f(t))\leq h_1(f(t))$이므로 $g_1(t)=h_1(f(t))$, $g_2(t)=h_2(f(t))$이다.

$1\leq t\leq 4$인 실수 t에 대하여 $g(t)\geq 0$이고, $1\leq t\leq 3$인 실수 t에 대하여 $f'(t)\leq 0$,
$3\leq t\leq 4$인 실수 t에 대하여 $f'(t)\geq 0$이므로 제시문 (ㄷ)의 S는 다음과 같다.

$$S = -\int_1^3 f'(x)g(x)dx + \int_3^4 f'(x)g(x)dx = -\int_1^3 h_1(f(x))(f'(x) + \int_3^4 f'(x)g(x)dx$$

1) $-\int_1^3 h_1(f(x))(f'(x)dx = -\int_{2k+c}^{-2k+c} h_1(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx$

$= 4k \times h_1(2k+c) - \int_3^4 \{f(x) - (-2k+c)\}dx = 16k - \dfrac{5}{4}k = \dfrac{59}{4}k$

2) $g(x) = g_1(x)$인 경우:

$\int_3^4 f'(x)g(x)dx = \int_3^4 h_1(f(x))(f'(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx = \dfrac{59}{4}k$

$g(x) = g_2(x)$인 경우:

$\int_3^4 f'(x)g(x)dx = \int_3^4 h_2(f(x))(f'(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_2(x)dx = 8k$

따라서 $S = \dfrac{59}{2}k$ 또는 $\dfrac{91}{4}k$이다.

$|f(2) - f(1)| = 2k$이므로 제시문 (ㄱ)의 조건 (가)에서 $10 \le 2k \le 20$, 즉 $5 \le k \le 10$이다.

그러므로 $M = \dfrac{59}{2} \times 10 = 295$, $m = \dfrac{91}{4} \times 5 = \dfrac{455}{4}$이다.