

의예 3/ 약학 3

1. 일반 정보

유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	의예과 / 약학과 문항 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	연속함수의 성질의 활용, 평균값 정리
예상 소요 시간	의예과 25분 / 100분 ; 약학과 30분 / 90분	

2. 문항 및 제시문

문항 3

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하십시오. (200점)

(ㄱ) 실수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다. (단, n 은 자연수이고 e 는 자연로그의 밑이다.)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & (x < -1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n} + 1} + \frac{2(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x + 1)}{2x^{2n} + 1} \right) & (-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } x > 1) \\ c & (x = 1) \end{cases}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.

(나) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -1 에서 1 까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 p 의 집합을 A 라고 하자. (단, $p \neq 1$)

$$1과 p 사이에 있는 임의의 실수 r에 대하여 $\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} \neq \frac{f(p) - f(1)}{p - 1}$ 이다.$$

논제 (200점) 제시문 (ㄷ)의 집합 A 를 구하고 그 근거를 논술하십시오.

3. 출제 의도

- 1) 사잇값의 정리와 평균값 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
- 2) 지수함수의 그래프를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지를 확인한다.
- 3) 평균변화율을 이해하고, 이를 함수의 그래프를 통해 활용할 수 있는지를 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제2020-236호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문 (ㄱ)	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ① 함수의 극한 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다. [미적분] - (1) 수열의 극한 - ② 급수 [12미적01-05] 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
제시문 (ㄴ)	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 [12수학 II 01-03] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - ① 미분계수 [12수학 II 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
제시문 (ㄷ)	[수학 II] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속 [12수학 II 01-03] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [수학 II] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학 II 02-07] 함수에 대한 평균값의 정리를 이해한다.
문제	[미적분] - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. [미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 II	배종숙 외	금성출판사	2023	12-115
	수학 II	이준열 외	천재교육	2021	10-113
	수학 II	권오남 외	교학사	2021	12-117
	미적분	권오남 외	교학사	2020	12-139
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2021	12-155
	미적분	김원경 외	비상교육	2021	11-120

5. 문항 해설

- 1) 함수의 극한의 성질을 통해 함수의 극한을 각 구간으로 나누어 표현할 수 있는지를 평가한다.
- 2) 지수함수와 유리함수가 섞여 있는 경우 함수의 그래프의 개형을 이해할 수 있는지를 평가한다.
- 3) 평균값 정리를 그림으로 이해하고 직선의 방정식을 통해 함수를 이해할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	<p>각 범위에 맞는 x에 대하여 함수 $f(x)$의 값은 극한을 이용하여 다음과 같이 계산한다.</p> <p>(i) $x > 1$이면,</p> $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n}+1} + \frac{2(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\dots+x+1)}{2x^{2n}+1} \right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ae^{x+1}}{1+\frac{1}{3x^{2n}}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{2x^{2n}}} \right)$ $= ae^{x+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x^k} = ae^{x+1} + \frac{1}{x-1}$ <p>즉, $f(x) = ae^{x+1} + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$)이다.</p> <p>(ii) $x < 1$이면,</p> $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n}+1} + \frac{2(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\dots+x+1)}{2x^{2n}+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x^{2n}-1)}{(2x^{2n}+1)(x-1)} = \frac{2}{1-x}$ <p>(iii) $x = -1$일 경우에는 $f(-1) = \frac{3}{4}a$이다.</p> <p>(i), (ii), (iii)을 종합하면, 제시문 (ㄴ)의 (가) 조건에서 함수 $f(x)$가 $x = -1$에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = a + b, f(-1) = \frac{3}{4}a$의 값이 일치하고, $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$이다.</p> <p>(나) 조건에서는 x가 -1부터 1까지 변할 때 $f(x)$의 평균변화율이 $\frac{1}{2}$이므로 $c = 2$이다.</p>	50
	<p>(1) $p > 1$일 때, 1과 p사이의 x에 대하여 $f(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{1}{x-1}$이다.</p> <p>점 $(1, f(1))$에서 함수 $y = f(x)$에 그른 접선의 접점을 $(t, f(t))$라 하면 접선의 방정식은</p> $y = \left(\frac{4}{3}e^{t+1} - \frac{1}{(t-1)^2} \right)(x-t) + \frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{1}{t-1}$ <p>이고</p> $2 = \frac{4}{3}(2-t)e^{t+1} + \frac{2}{t-1}$ <p>이므로 정리하면 $\left(\frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{2}{t-1} \right)(2-t) = 0$,</p> <p>즉 $t = 2$이다. 이때, $f''(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{2}{(x-1)^3} > 0$ 이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.</p>	30

하위 문항	채점 기준	배점
	<p>이제 점 $(1, f(1))$부터 $(p, f(p))$까지 선분을 그려보면 그래프의 개형으로부터 $p \leq 2$인 경우 함수 $y = f(x)$의 그래프와 두 끝점에서만 만나고, $p > 2$인 경우 교점이 하나 더 존재하게 되므로 1과 2사이의 값 q에 대해 $(q, f(q))$에서도 만난다. 즉, $p > 2$이면 평균값정리에 의해 q와 p 사이에 $\frac{f(p)-f(1)}{p-1} = \frac{f(p)-f(q)}{p-q} = f'(r)$을 만족시키는 r이 있으므로 $p > 2$이면 집합 A에 속할 수 없다. 반대로 두 끝점에서만 만날 경우 $f'(x)$가 증가하므로 $f'(r)$은 선분의 기울기보다 항상 작게 되고, $1 < p \leq 2$이면 집합 A에 속한다.</p>	
	<p>(2) $-1 \leq p < 1$일 때, 함수 $y = \frac{2}{1-x}$는 $x = -1$에서의 미분계수가 $\frac{1}{2}$이고 증가함수이다. 따라서 두 점 $(-1, 1)$와 $(1, 2)$를 지나는 직선은 함수 $y = \frac{2}{1-x}$와 $x = -1$에서 접한다. 즉, x가 p부터 1까지 변할 때 함수 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이하이다. p와 1 사이의 r은 $f'(r) > \frac{1}{2}$이므로 평균변화율과 $f'(r)$이 일치할 수 없다. 즉, $-1 \leq p < 1$이면 A에 속한다.</p>	30
문제	<p>(3) $p < -1$일 때, p와 1 사이의 r에 대하여 가능한 모든 $\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$의 값을 생각해 보면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\frac{8}{3}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(r) = \infty$이고 $\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$은 r이 커짐에 따라 항상 증가하므로 $-\frac{8}{3}$ 이상 $\frac{1}{2}$ 미만의 평균변화율은 $\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$과 일치할 수 없다. 먼저, $f(p) > 1$이므로 평균변화율은 모두 $\frac{1}{2}$ 미만이다. 점 $(1, f(1))$에서 기울기 $-\frac{8}{3}$에 해당하는 직선 $y = -\frac{8}{3}(x-1) + 2$와 함수 $y = f(x)$의 교점을 $(s, f(s))$라 하면 $\frac{4}{3}s^2 - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}(s-1) + 2$이므로 $4s^2 + 8s - 15 = 0$이고, $s < -1$인 범위에서는 $s = -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$이다. 따라서 $-1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < -1$인 경우에는 A에 속한다.</p>	30
	<p>$p < -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$이면 $\frac{f(1)-f(p)}{1-p} < -\frac{8}{3}$이고, 그래프의 개형에 따르면 $f'(p) < \frac{f(1)-f(p)}{1-p}$이다. 이때, 함수 $g(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}$에 대하여 $g'(p) = f'(p)$이고 $g'(-1) = -\frac{8}{3}$, $g'(x)$는 연속이므로 사잇값의 정리에 따르면 p와 -1 사이에 $f'(r) = g'(r) = \frac{f(1)-f(p)}{1-p}$인 r이 존재하며, 따라서 p는 A에 속하지 않는다.</p>	30
	<p>(1), (2)를 종합하면 $A = \left\{ p \mid -1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < 1, 1 < p \leq 2 \right\}$이다.</p>	30

7. 예시 답안

각 범위에 맞는 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 값은 극한을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

(i) $x > 1$ 이면,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n}+1} + \frac{2(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\dots+x+1)}{2x^{2n}+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ae^{x+1}}{1+\frac{1}{3x^{2n}}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{2x^{2n}}} \right) \\ &= ae^{x+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x^k} = ae^{x+1} + \frac{1}{x-1} \\ \text{즉, } f(x) &= ae^{x+1} + \frac{1}{x-1} \quad (x > 1) \text{이다.} \end{aligned}$$

(ii) $|x| < 1$ 이면,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n}+1} + \frac{2(x^{2n-1}+x^{2n-2}+\dots+x+1)}{2x^{2n}+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x^{2n}-1)}{(2x^{2n}+1)(x-1)} = \frac{2}{1-x}$$

(iii) $x = -1$ 일 경우에는 $f(-1) = \frac{3}{4}a$ 이다.

(i), (ii), (iii)을 종합하면, 제시문 (ㄴ)의 (가) 조건에서 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = a + b, f(-1) = \frac{3}{4}a \text{의 값이 일치하고, } a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3} \text{이다. (나) 조건에서는}$$

x 가 -1 부터 1 까지 변할 때 $f(x)$ 의 평균변화율이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $c = 2$ 이다.

(1) $p > 1$ 일 때, 1 과 p 사이의 x 에 대하여 $f(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{1}{x-1}$ 이다.

점 $(1, f(1))$ 에서 함수 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점을 $(t, f(t))$ 라 하면 접선의 방정식은

$$y = \left(\frac{4}{3}e^{t+1} - \frac{1}{(t-1)^2} \right)(x-t) + \frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{1}{t-1} \text{이고 } 2 = \frac{4}{3}(2-t)e^{t+1} + \frac{2}{t-1} \text{이므로}$$

$$\text{정리하면 } \left(\frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{2}{t-1} \right)(2-t) = 0,$$

즉 $t = 2$ 이다. 이때, $f''(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{2}{(x-1)^3} > 0$ 이므로 $f'(x)$ 는 증가함수이다.

이제 점 $(1, f(1))$ 부터 $(p, f(p))$ 까지 선분을 그려보면 그래프의 개형으로부터 $p \leq 2$ 인 경우 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 두 끝점에서만 만나고, $p > 2$ 인 경우 교점이 하나 더 존재하게 되므로 1 과 2 사이의 값 q 에 대해

$$(q, f(q)) \text{에서도 만난다. 즉, } p > 2 \text{이면 평균값정리에 의해 } q \text{와 } p \text{ 사이에 } \frac{f(p)-f(1)}{p-1} = \frac{f(p)-f(q)}{p-q} = f'(r) \text{을}$$

만족시키는 r 이 있으므로 $p > 2$ 이면 집합 A 에 속할 수 없다. 반대로 두 끝점에서만 만날 경우 $f'(x)$ 가 증가하므로 $f'(r)$ 은 선분의 기울기보다 항상 작게 되고, $1 < p \leq 2$ 이면 집합 A 에 속한다.

(2) $-1 \leq p < 1$ 일 때, 함수 $y = \frac{2}{1-x}$ 는 $x = -1$ 에서의 미분계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 증가함수이다.

따라서 두 점 $(-1, 1)$ 와 $(1, 2)$ 를 지나는 직선은 함수 $y = \frac{2}{1-x}$ 와 $x = -1$ 에서 접한다.

즉, x 가 p 부터 1 까지 변할 때 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$ 이하이다.

p 와 1 사이의 r 은 $f'(r) > \frac{1}{2}$ 이므로 평균변화율과 $f'(r)$ 이 일치할 수 없다.

즉, $-1 \leq p < 1$ 이면 A 에 속한다.

(3) $p < -1$ 일 때, p 와 1 사이의 r 에 대하여 가능한 모든 $\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ 의 값을 생각해보면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\frac{8}{3}, \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \infty \text{ 이고}$$

$\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ 은 r 이 커짐에 따라 항상 증가하므로 $-\frac{8}{3}$ 이상 $\frac{1}{2}$ 미만의 평균변화율은

$\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ 과 일치할 수 없다. 먼저, $f(p) > 1$ 이므로 평균변화율은 모두 $\frac{1}{2}$ 미만이다.

점 $(1, f(1))$ 에서 기울기 $-\frac{8}{3}$ 에 해당하는 직선 $y = -\frac{8}{3}(x-1) + 2$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 교점을

$$(s, f(s)) \text{ 라 하면 } \frac{4}{3}s^2 - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}(s-1) + 2 \text{ 이므로 } 4s^2 + 8s - 15 = 0 \text{ 이고,}$$

$s < -1$ 인 범위에서는 $s = -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$ 이다. 따라서 $-1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < -1$ 인 경우에는 A 에 속한다.

$p < -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$ 이면 $\frac{f(1) - f(p)}{1 - p} < -\frac{8}{3}$ 이고, 그래프의 개형에 따르면 $f'(p) < \frac{f(1) - f(p)}{1 - p}$ 이다. 이때,

함수 $g(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}$ 에 대하여 $g'(p) = f'(p)$ 이고, $g'(-1) = -\frac{8}{3}$, $g'(x)$ 는 연속이므로

사잇값의 정리에 따르면 p 와 -1 사이에 $f'(r) = g'(r) = \frac{f(1) - f(p)}{1 - p}$ 인 r 이 존재하며,

따라서 p 는 A 에 속하지 않는다.

(1), (2) 를 종합하면 $A = \left\{ p \mid -1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < -1, 1 < p \leq 2 \right\}$ 이다.